Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 3

Abgabe in den Übungen vom 2. bis 8. November 2006

AUFGABE 3.1 (4 Punkte) — Ermitteln Sie den Real- und den Imaginärteil der Zahl $z = (1 + \mathrm{i})^8$.

AUFGABE 3.2 (4 Punkte) — Bestimmen Sie jeweils für die Gleichungen

$$(i) \quad z^2 - \sqrt{2}\, z = \mathrm{i} - \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad z^8 = 1$$

alle komplexen Lösungen z in der Form $z = a + \mathrm{i}b$.

AUFGABE 3.3 (4 Punkte) — Sei $r \in (0, \infty)$. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-r\} \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) = \frac{z-r}{z+r}$.

(i) Zeigen Sie, dass f die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$ auf die imaginäre Achse abbildet (insbesondere also auch, dass jeder Punkt der imaginären Achse im Bild von f vorkommt).

(ii) Folgern Sie aus (i) den *Satz des Thales*: Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn sich auf seinem Umkreis zwei seiner Ecken gegenüber liegen.

AUFGABE 3.4 (4 Punkte) — Ermitteln Sie die folgenden Mengen, und fertigen Sie eine Skizze an.

$$(i) \quad \{z \in \mathbb{C}\colon |z| + \mathrm{Re}(z) \le 1\} \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon \mathrm{Re}(\tfrac{1}{z}) = 1\}.$$