Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 2

Abgabe in den Übungen vom 26. Oktober bis 1. November 2006

Aufgabe 2.1 (4 Punkte) — Es sei $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolger-Abbildung, die die Peano-Axiome erfüllt. Wir definieren auf $\mathbb{N}$ die Addition rekursiv durch $x + 0 = x$ und $x + N(y) = N(x + y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ sowie die Multiplikation durch $x \cdot 0 = 0$ und $x \cdot N(y) = x \cdot y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

(i) Die Konstanten $1, 2, 3, 4 \in \mathbb{N}$ sind definiert durch $1 = N(0)$, $2 = N(1)$, $3 = N(2)$ und $4 = N(3)$. Beweisen Sie, dass $2 + 2 = 4$ gilt.

(ii) Beweisen Sie das Distributivgesetz, nämlich $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass das Assoziativgesetz ($x+(y+z) = (x+y)+z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$) gilt.

Aufgabe 2.2 (8 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

(ii) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen an und beweisen Sie sie.

(iii) Beweisen Sie durch eine Vollständige Induktion, dass für alle $n, a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $a \geq 3$ gilt: $a^n > n^2$.

(iv) Beweisen Sie durch eine Vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte) — Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere nach oben beschränkte Mengen. Die Summe von A und B ist definiert als

$$A + B = \{a + b\colon a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ ebenfalls nach oben beschränkt ist und dass $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ gilt.