Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 28

Auf diesem Blatt können Sie Zusatzpunkte zu dem Hausarbeitskriterium der zweiten Hälfte des Semesters erarbeiten. Betreffs der Abgabe der Lösungen und Rückgabe der Korrekturen machen Sie bitte etwas mit Ihrem/r Übungsgruppenleiter(in) aus.

AUFGABE 28.1 (4 Punkte) — Wir betrachten die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$F(x,y) = \big(x^2 - y^2, 2xy\big).$$

Berechnen Sie $DF(x,y)$ und (falls existent) ihre Inverse. Zeigen Sie, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ genau zwei Urbilder besitzt.

AUFGABE 28.2 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \qquad (1)\\ 2x + u^2 - uv &= 5 \qquad (2) \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(2,5)$ durch eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann, und berechnen Sie ihre Ableitung in diesem Punkt.

AUFGABE 28.3 (4 Punkte) — Wir betrachten die Funktion

$$F\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x-y}.$$

Untersuchen Sie, in welchen Rechtecken $I \times J$ in $(0,\infty)^2$ sich die Höhenlinien $\{(x,y) \in I \times J\colon F(x,y) = c\}$ als Graph einer Funktion $y = \varphi(x)$ bzw. $x = \psi(y)$ schreiben lassen.

AUFGABE 28.4 (4 Punkte) — Bestimmen Sie alle Maxima und Minima von $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Kreisscheibe $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \le 1\}$.

Hinweis: Betrachten Sie sowohl die Maxima im Inneren K° als auch auf dem Rand ∂K.