Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 27

Abgabe in den Übungen vom 4. und 5. Februar 2009

AUFGABE 27.1 (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{2n}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n},$$

wobei $u_{2n} = \mathbb{P}_{2n}(S_{2n} = 0)$.

AUFGABE 27.2 (ERWARTETE ANZAHL DER SELBSTÜBERSCHNEIDUNGEN) (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt im $\mathbb{Z}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ und

$$U_n = \sum_{0\leq i<j\leq n} \mathbb{1}_{\{S_i=S_j\}}$$

die Anzahl der Selbstüberschneidungen des Pfades $(S_0, \dots, S_n)$, die sogenannte *Selbstüberschneidungslokalzeit*.

(i) Sei $\ell_n(z) = \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{S_i=z\}}$ die *Lokalzeit* des Pfades $(S_0, \dots, S_n)$ in $z \in \mathbb{Z}^d$. Stellen Sie U_n mit Hilfe von n und $\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \ell_n(z)^2$ dar.

(ii) Ermitteln Sie für $d \leq 2$ die Asymptotik des Erwartungswerts von U_n für $n \to \infty$, d. h., finden Sie eine Konstante C und Potenzen α, β, so dass

$$\mathbb{E}[U_n] \sim Cn^\alpha (\log n)^\beta, \qquad n \to \infty.$$

Hinweis: Die Aussage aus (i) wird bei (ii) nicht gebraucht. Erinnern Sie sich bei (ii) an den Beweis von Satz 9.3.9.

AUFGABE 27.3 (MINIMUM DER IRRFAHRT MIT DRIFT) (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Irrfahrt mit Drift $\theta \in (0,1)$ in $\mathbb{Z}$, also $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, und die X_i sind unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}(1+\theta) = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$. Sei $M_\infty = \inf\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ das Minimum der ganzen Irrfahrt. Ermitteln Sie die Verteilung von M_∞.

Hinweis: Verfahren Sie ähnlich wie in Beispiel 9.4.7.

AUFGABE 27.4 (MOMENTE DER BROWN'SCHEN BEWEGUNG) (4 Punkte) — Sei $(B_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brown'sche Bewegung.

(i) Zeigen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $t \in [0,\infty)$, dass gilt: $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha B_t}] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$.

(ii) Benutzen Sie das Ergebnis aus (i) und den Identitätssatz für Potenzreihen, um zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \in [0,\infty)$ gelten: $\mathbb{E}[B_t^{2n+1}] = 0$ und $\mathbb{E}[B_t^{2n}] = (\frac{t}{2})^n \frac{(2n)!}{n!}$.