Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. Wolfgang König

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 27

Abgabe in den Übungen vom 4. und 5. Februar 2009

Aufgabe 27.1 (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{2n}(S_1\geq 0,\dots,S_{2n}\geq 0)=u_{2n},$$

wobei $u_{2n}=\mathbb{P}_{2n}(S_{2n}=0)$.

Aufgabe 27.2 (Erwartete Anzahl der Selbstüberschneidungen) (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt im $\mathbb{Z}^d$ mit $d\in\mathbb{N}$ und

$$U_n=\sum_{0\leq i<j\leq n}\mathbb{1}_{\{S_i=S_j\}}$$

die Anzahl der Selbstüberschneidungen des Pfades $(S_0,\dots,S_n)$, die sogenannte *Selbstüberschneidungslokalzeit*.

(i) Sei $\ell_n(z)=\sum_{i=0}^n\mathbb{1}_{\{S_i=z\}}$ die *Lokalzeit* des Pfades $(S_0,\dots,S_n)$ in $z\in\mathbb{Z}^d$. Stellen Sie U_n mit Hilfe von n und $\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}\ell_n(z)^2$ dar.

(ii) Ermitteln Sie für $d\leq 2$ die Asymptotik des Erwartungswerts von U_n für $n\to\infty$, d. h., finden Sie eine Konstante C und Potenzen α,β, so dass

$$\mathbb{E}[U_n]\sim Cn^\alpha(\log n)^\beta,\qquad n\to\infty.$$

Hinweis: Die Aussage aus (i) wird bei (ii) nicht gebraucht. Erinnern Sie sich bei (ii) an den Beweis von Satz 9.3.9.

Aufgabe 27.3 (Minimum der Irrfahrt mit Drift) (4 Punkte) — Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Irrfahrt mit Drift $\theta\in(0,1)$ in $\mathbb{Z}$, also $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, und die X_i sind unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i=1)=\frac{1}{2}(1+\theta)=1-\mathbb{P}(X_i=-1)$. Sei $M_\infty=\inf\{S_n\colon n\in\mathbb{N}_0\}$ das Minimum der ganzen Irrfahrt. Ermitteln Sie die Verteilung von M_∞.

Hinweis: Verfahren Sie ähnlich wie in Beispiel 9.4.7.

Aufgabe 27.4 (Momente der Brown'schen Bewegung) (4 Punkte) — Sei $(B_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brown'sche Bewegung.

(i) Zeigen Sie für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ und jedes $t\in[0,\infty)$, dass gilt: $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha B_t}]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$.

(ii) Benutzen Sie das Ergebnis aus (i) und den Identitätssatz für Potenzreihen, um zu zeigen, dass für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ und jedes $t\in[0,\infty)$ gelten: $\mathbb{E}[B_t^{2n+1}]=0$ und $\mathbb{E}[B_t^{2n}]=(\frac{t}{2})^n\frac{(2n)!}{n!}$.