Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 26

Abgabe in den Übungen vom 28. und 29. Januar 2009

AUFGABE 26.1 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, und $T\colon \Omega \to \Omega$ messbar. Mit Φ bezeichnen wir die Menge der T-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie:

(i) Φ ist konvex.

(ii) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} \in \Phi$ ist genau dann ein Extremalpunkt von Φ (d. h., $\mathbb{P}$ kann nicht als $\mathbb{P} = \lambda\mathbb{P}_1 + (1-\lambda)\mathbb{P}_2$ dargestellt werden mit $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \Phi$ und $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ und $\lambda \in (0,1)$), wenn es T-ergodisch ist.

Hinweise zu (b): Stellen Sie ein nicht T-ergodisches Maß $\mathbb{P} \in \Phi$ als Konvexkombination zweier Maße der Form $\mathbb{P}(\cdot \mid A)$ und $\mathbb{P}(\cdot \mid A^c)$ dar. Falls $\mathbb{P} = \lambda\mathbb{P}_1 + (1-\lambda)\mathbb{P}_2$ mit $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \Phi$, $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ und $\lambda \in (0,1)$, bestimmen Sie im Fall, dass $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ ergodisch sind, den Wert von $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(T^j) = \mathbb{P}_1(A))$ für ein geeignetes Ereignis A.

AUFGABE 26.2 (4 Punkte) — Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage in Aufgabe 25.2(i): Falls eine Maß erhaltende Transformation ergodisch ist, ist sie auch schwach mischend.

Hinweis: Benutzen Sie den Ergodensatz.

AUFGABE 26.3 (L^1-KONVERGENZ IM ERGODENSATZ) (4 Punkte) — Es sei T eine Maß erhaltende Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{J}$ die σ-Algebra der T-invarianten Ereignisse. Sei X eine integrierbare Zufallsgröße. Nach dem Ergodensatz gibt es eine $\mathcal{J}$-messbare Zufallsgröße Y mit $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X \circ T^i = Y$ fast sicher. Zeigen Sie, dass auch gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X \circ T^i - Y\Big|\Big] = 0.$$

Hinweise: Überlegen Sie sich, dass Sie von $Y = 0$ ausgehen dürfen, integrieren Sie $|X \circ T^i|$ über die Menge $\{|X \circ T^i| > N\}$, und wenden Sie die Sätze von Egoroff und Lebesgue an.

Gegenstand der Maßtheorie ist der

Satz von Egoroff. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, die fast sicher gegen eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiere. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Ereignis A mit $\mathbb{P}(A^c) < \varepsilon$, so dass $\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in A} |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0$ gilt.

AUFGABE 26.4 (4 Punkte) — Es seien $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum$(\Omega, \mathcal{F})$ und $T\colon \Omega \to \Omega$ sowohl unter $\mathbb{P}_1$ als auch unter $\mathbb{P}_2$ ergodisch. Zeigen Sie, dass dann entweder $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ gilt oder es ein Ereignis A gibt mit $\mathbb{P}_1(A) = 1$ und $\mathbb{P}_2(A) = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ergodensatz für eine geeignete Funktion f.