Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 25

Abgabe in den Übungen vom 21. und 22. Januar 2009

AUFGABE 25.1 (4 Punkte) — Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0,1],\ \mathcal{B}_{[0,1]})$ und $T(x) := x^2$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass T genau dann Maß erhaltend ist, wenn $\mathbb{P}(\{0,1\}) = 1$ gilt.

Tipp zu „⇒“: Betrachten Sie $\mathbb{P} \circ T^{-n}([x,1])$ für $x \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$.

AUFGABE 25.2 (4 Punkte) —

(i) Eine Maß erhaltende Transformation T auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *schwach mischend,* falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(A \cap T^{-j}B) = \mathbb{P}(A) \cdot P(B), \qquad A, B \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass T ergodisch ist, wenn es schwach mischend ist.

(ii) Es seien $\omega^{(0)} = (0,1,0,1,\dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\omega^{(1)} = (1,0,1,0,\dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}(\delta_{\omega^{(0)}} + \delta_{\omega^{(1)}}).$$

Zeigen Sie, dass der Verschiebungsoperator auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ergodisch bezüglich $\mathbb{P}$ ist und dass die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$ nicht $\mathbb{P}$-trivial ist.

AUFGABE 25.3 (SATZ VON HEWITT-SAVAGE) (4 Punkte) — Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$, so dass die Projektionen $\pi_1, \pi_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt sind. Mit $\mathfrak{S}_n$ sei die Menge der Permutationen von $1, \dots, n$ bezeichnet. Für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sei $T_\sigma \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$(T_\sigma(x))_j := \begin{cases} x_{\sigma(j)}, & \text{falls } j \in \{1, \dots, n\}, \\ x_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass T_σ Maß erhaltend ist und dass

$$\mathcal{C} := \{\, F \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \colon T_\sigma^{-1} F = F \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sigma \in \mathfrak{S}_n \,\}$$

eine $\mathbb{P}$-triviale σ-Algebra ist.

Hinweis: Approximieren Sie Mit Hilfe von Lemma 10.2.12 ein $F \in \mathcal{C}$ mit einem Element der Algebra $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\pi_1, \dots, \pi_n)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F)^2$ gilt.

AUFGABE 25.4 (4 Punkte) — Es sei $\Gamma = (\gamma(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix, so dass jede linke obere $n \times n$-Teilecke $\Gamma^{(n)}$ positiv definit ist, und $(X_n)_n$ sei eine Folge von zentrierten Zufallsgrößen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Vektor $(X_1, \dots, X_n)$ gemeinsam normalverteilt ist mit Kovarianzmatrix $\Gamma^{(n)}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(X_n)_n$ genau dann stationär ist, wenn es eine Funktion $\varphi \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gibt mit $\gamma(i,j) = \varphi(|i-j|)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.