Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 25

Abgabe in den Übungen vom 26. bis 29. Juni 2007

Aufgabe 25.1 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Funktionen $x \mapsto \log\|x\|$ bzw. $x \mapsto \|x\|^{2-n}$ harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bzw. in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $n \geq 3$ sind.

Aufgabe 25.2 (4 Punkte) — Wir definieren $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber $D_1D_2f(0,0) \neq D_2D_1f(0,0)$ gilt. Untersuchen Sie auch f auf Stetigkeit in $(0,0)$.

Aufgabe 25.3 (2 + 2 Punkte) —

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x,t) = t^{-n/2}\mathrm{e}^{-\|x\|^2/(4t)},$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ist.

Aufgabe 25.4 (3 Punkte) — Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass das Vektorprodukt $f \times g\colon I \to \mathbb{R}^3$ ebenfalls differenzierbar ist mit

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

Aufgabe 25.5 (3 Punkte) — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass ihre Differentialmatrix Df auf U beschränkt ist. Zeigen Sie, dass f in U gleichmäßig stetig ist.

Aktuelle Information: Die Fachschaftsratswahlen finden vom **12. bis 14. Juni** statt. Sie können Ihre Stimme an diesen Tagen zwischen 8 und 17 Uhr im Büro der Fachschaft (Raum 4-45 in der Johannisgasse 26) abgeben; jede(r) Wähler(in) bekommt einen Eierkuchen!