Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. Wolfgang König

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 23

Abgabe in den Übungen vom 7. und 8. Januar 2009

Aufgabe 23.1 (4 Punkte) — Gegeben sei die folgende stochastische Matrix auf $I = \{1, \dots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die mittlere Rückkehrzeit der zugehörigen Markovkette in jedem Punkt aus I.

Aufgabe 23.2 (4 Punkte) — Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positiv rekurrente Markovkette auf $\mathbb{N}$ mit Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und invarianter Verteilung $\mu = (\mu(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\tau_n = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \colon S_k > n\}$ der Zeitpunkt, an dem der Prozess $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ den Punkt n überschreitet. Sie dürfen benutzen, dass der Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y_n = (X_{\tau_n}, S_{\tau_n} - n)$ eine irreduzible und aperiodische Markovkette auf $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \colon j \leq i\}$ ist, und dass ihre Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$q_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = \begin{cases} p_{i_1,i_2}\delta_{i_2,j_2} & \text{falls } j_1 = 1, \\ \delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Geben Sie ein handliches äquivalentes Kriterium für die Existenz einer invarianten Verteilung ν der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, und ermitteln Sie sie in diesem Fall.

(ii) Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $u_n = \mathbb{P}(\text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } S_k = n)$ in dem Fall, dass ν existiert. Geben Sie eine intuitive Vermutung, wogegen u_n für $n \to \infty$ konvergieren sollte, und ermitteln Sie den Grenzwert anschließend mit Hilfe der positiven Rekurrenz der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Hinweise: In (i) stelle man ein Gleichungssystem auf und löse es sukzessive. In (ii) drücke man das betrachtete Ereignis mit Hilfe von Y_n aus.

Aufgabe 23.3 (Geburts– und Todesprozesse) (4 Punkte) — Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest, und es sei $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ eine stochastische Matrix auf $I = \{1, \dots, N\}$ mit $p_{i,j} > 0$, falls $|i - j| = 1$, und $p_{i,j} = 0$, falls $|i - j| \geq 2$. Zeigen Sie, dass P reversibel ist.

Aufgabe 23.4 (Variante des Polya-Modells) (4 Punkte) — Es sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fest, und es sei eine Urne gegeben, die höchstens N Kugeln fasst. Wir betrachten Kugeln in der Urne in den Farben weiß und schwarz; von jeder dieser Farben liege immer mindestens eine Kugel in der Urne. Falls weniger als N Kugeln in der Urne liegen, so wird zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Kugeln gezogen und zusammen mit einer neuen Kugel der selben Farbe in die Urne zurück gelegt. Falls die Urne N Kugeln hat, so wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nichts getan, und ansonsten werden alle Kugeln bis auf je eine weiße und eine schwarze aus der Urne entfernt.
Seien W_n beziehungsweise S_n die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne nach der n-ten Durchführung dieses Verfahrens. Es ist leicht zu sehen, dass (W_n, S_n) eine Markovkette auf $I = \{1, \dots, N\}^2$ ist. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette, klären Sie, ob sie eine asymptotische Verteilung hat, und ermitteln Sie diese Verteilung gegebenenfalls.