Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 23

Abgabe in den Übungen vom 12. bis 15. Juni 2007

Aufgabe 23.1 (3 Punkte) — Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Ferner sei $x \in X \setminus A$ mit $\operatorname{dist}(x, A) = 0$. Zeigen Sie, dass x ein Randpunkt von A ist.

Aufgabe 23.2 (1+2 Punkte) —

(i) Sei $f \in \mathcal{C}[a, b]$ mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für jedes $x \in [a, b]$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}[a, b]$ mit der Metrik

$$\mathrm{d}_2(f, g) = \Big(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}$$

nicht vollständig ist.

Hinweis: Bei (ii) betrachten Sie z. B. eine geeignete Fourierreihe.

Aufgabe 23.3 (3 Punkte) — Zeigen Sie für jedes $p \in [1, \infty)$ die Vollständigkeit des Raumes $\ell^p(\mathbb{N})$ mit der Metrik

$$\mathrm{d}_p(x, y) = \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Aufgabe 23.4 (3 Punkte) — Benutzen Sie den Banach'schen Fixpunktsatz, um zu zeigen, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{1+x}$, genau einen Fixpunkt x^* hat, und bestimmen Sie x^* auf drei Stellen nach dem Komma genau.

Aufgabe 23.5 (2+2 Punkte) — Das Newtonverfahren mittels Fixpunktsatz.

(i) Es sei $a < b$ und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es existiere eine Nullstelle x^* in (a, b). Benutzen Sie den Banach'schen Fixpunktsatz, um zu zeigen, dass für jeden genügend nahe bei x^* liegenden Startwert x_0 das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gegen x^* konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie näherungsweise die kleinste positive Nullstelle der Funktion $x \mapsto x - \cos^2 x$.