Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. Wolfgang König

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 22

Abgabe in den Übungen vom 17. und 18. Dezember 2008

Aufgabe 22.1 (4 Punkte) — Beginnend am Tag 1, wird jeden Tag eine von N numerierten Kugeln gezogen, und zwar mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von allen anderen Ziehungen, bis irgendeine der Kugeln zum zweiten Mal gezogen wird.

(i) Stellen Sie ein mathematisches Modell auf, und beweisen Sie, dass die Anzahl der Ziehungen eine Stoppzeit ist.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung dieser Stoppzeit.

Aufgabe 22.2 (Elektrisches Potential in Netzwerken) (4 Punkte) — Sei $(E, (C_{xy})_{x,y\in E})$ ein elektrisches Netzwerk mit einer endlichen Eckenmenge E und symmetrischen Leitfähigkeiten $C_{xy} = C_{yx} \in [0,\infty)$ der direkten Verbindungen von x und $y \in E$. Es sei voraus gesetzt, dass zwischen je zwei Ecken eine leitende Verbindung besteht (die eventuell nicht direkt ist), d. h., für alle x ist $C_x := \sum_{y\in E} C_{xy}$ positiv, und die stochastische Matrix $P = (C_{xy}/C_x)_{x,y\in E}$ ist irreduzibel. Wir setzen auch voraus, dass P aperiodisch ist. Ferner sei i_{xy} der Stromfluss von x nach y, und $R_{xy} = 1/C_{xy}$ sei der Widerstand der direkten Verbindung von x nach y.
Wir betrachten zwei feste, verschiedene Ecken $a, b \in E$. Es werde eine Batterie a und b angeschlossen, so dass in a das elektrische Potential $\nu(a) = 1$ und in b das Potential $\nu(b) = 0$ anliegen.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in E$ das Potential $\nu(x)$ im Punkt x identisch ist mit der Wahrscheinlichkeit, dass eine in x gestartete Markovkette mit Übergangsmatrix P den Punkt a vor dem Punkt b besucht.

(ii) Für $x \in E$ sei $u(x)$ die erwartete Anzahl der Besuche in x der in a gestarteten Markovkette mit Übergangsmatrix P vor dem ersten Besuch in b. Wir normieren die Leitfähigkeiten so, dass $u(a) = C_a$ gilt. Zeigen Sie, dass $u(x) = C_x\nu(x)$ für alle $x \in E$ gilt, und leiten Sie eine Interpretation der Größe i_{xy} in Termen der in a gestarteten Markovkette her.

Hinweise: Benutzen Sie das *Ohm'sche Gesetz* [$i_{xy}R_{xy} = \nu(x) - \nu(y)$ für alle $x, y \in E$] sowie das *Kirchhoff'sche Gesetz* [$\sum_{y\in E} i_{xy} = 0$ für alle $x \in E \setminus \{a, b\}$]. Zeigen Sie in (i), dass ν ein Linkseigenvektor zum Eigenwert Eins für die stochastische Matrix $\widetilde{P}$ ist, die aus P entsteht, indem a und b absorbierend definiert werden. Betrachten Sie dann die Folge $(\nu(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(X_n)_n$ die Markovkette mit Übergangsmatrix $\widetilde{P}$ ist. Für (ii) betrachten Sie $(u(x)/C_x)_{x\in E}$ an Stelle von ν.

Definition. Man nennt eine stochastische Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ *aperiodisch*, wenn für jedes $i \in I$ der größte gemeinsame Teiler der Menge $\{n \in \mathbb{N} : p^{(n)}_{i,i} > 0\}$ gleich Eins ist. Eine Verteilung μ auf I heißt *reversibel für P* und man nennt dann auch P reversibel, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $\mu(i)p_{i,j} = \mu(j)p_{j,i}$.

AUFGABE 22.3 (4 Punkte) — Es sei I ein endlicher Zustandsraum, und es seien μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $P = (p_{xy})_{x,y\in I}$ eine stochastische Matrix auf I, so dass P reversibel ist und μ die unter P reversible Verteilung. Für $\beta > 0$ und eine beliebige Funktion $U\colon I \to \mathbb{R}$ definieren wir eine weitere Verteilung μ_β und eine weitere stochastische Matrix $P^{(\beta)}$ durch

$$\mu_\beta(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta U(x)} \mu(x), \qquad \text{wobei } Z_\beta = \sum_{x\in I} e^{-\beta U(x)} \mu(x),$$

und

$$p^{(\beta)}_{xy} = \begin{cases} p_{xy} e^{-\beta [U(y)-U(x)]^+}, & \text{falls } y \neq x, \\ 1 - \sum_{z\in I\setminus x} p_{xz} e^{-\beta[U(z)-U(x)]^+} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Hier bezeichnet a^+ den Positivteil von $a \in \mathbb{R}$.) Zeigen Sie Folgendes.

(i) Für $\beta \to \infty$ konvergiert μ_β gegen die Verteilung $\rho_M(x) = \mathbb{1}_M(x)\mu(x)/\mu(M)$, wobei $M = \{x \in I\colon U(x) = m\}$ und $m = \min_{x\in I} U(x)$.

(ii) Für jedes $\beta > 0$ is μ_β invariant unter $P^{(\beta)}$.

AUFGABE 22.4 (4 Punkte) — Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible aperiodische Markovkette auf einem höchstens abzählbaren Zustandsraum I. Wir fixieren eine natürliche Zahl k und betrachten den Vektor $X_n^{(k)} = (X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) \in I^k$.

(i) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markovkette $(X_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Bestimmen Sie eine Teilmenge von I^k, so dass die Einschränkung der Kette $(X_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf diese Menge eine aperiodische und irreduzible Markovkette ist. Ermitteln Sie ihre invariante Verteilung, sofern sie existiert.