Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 22

Abgabe in den Übungen vom 5. bis 8. Juni 2007

AUFGABE 22.1 (3 Punkte) — Wir betrachten $\delta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$, gegeben durch $\delta(x,y) = \arctan|x-y|$.

(i) Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ genau dann bezüglich δ offen ist, wenn sie bezüglich der Betragsmetrik offen ist.

AUFGABE 22.2 (4 Punkte) — Es sei $\mathcal{C}[0,\infty)$ die Menge aller stetigen Funktionen $[0,\infty) \to \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathrm{d}(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\sup_{x\in[0,n]} |f(x)-g(x)|}{1+\sup_{x\in[0,n]} |f(x)-g(x)|}$$

eine Metrik auf $\mathcal{C}[0,\infty)$ definiert wird.

(ii) Charakterisieren Sie die Konvergenz im Sinne dieser Metrik.

AUFGABE 22.3 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel im Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ aller beschränkten komplexen Folgen nicht folgenkompakt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge der 'Einheitsvektoren' $e_n = (\delta_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$.

DEFINITION. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *totalbeschränkt*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_n \in X$ existieren, so dass $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

AUFGABE 22.4 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass jeder folgenkompakte metrische Raum totalbeschränkt ist.

AUFGABE 22.5 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ auf dem $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind, d. h. dass eine Konstante $C \in (0,\infty)$ existiert mit $\frac{1}{C}\|v\| \le \|v\|_* \le C\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$.

Hinweis: Betrachten Sie $\inf\{\|v\|\colon v \in \mathbb{C}^n, \|v\|_* = 1\}$.