Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 21

Abgabe in den Übungen vom 22. bis 25. Mai 2007

AUFGABE 21.1 (3 Punkte) — Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$ erfüllt.

AUFGABE 21.2 (4 Punkte) —

(i) Berechnen Sie den Wert der Fourierreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

(ii) Beweisen Sie die Formel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

AUFGABE 21.3 (2 Punkte) — Es sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(0) = f(2\pi)$ und Fourierkoeffizienten c_k für $k \in \mathbb{Z}$. Ferner sei F eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von F.

AUFGABE 21.4 (4 Punkte) — ALLGEMEINE PARSEVAL'SCHE GLEICHUNG. Seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen mit $f(0) = f(2\pi)$, $g(0) = g(2\pi)$ und Fourierkoeffizienten c_k bzw. d_k für $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} d_k.$$

Hinweis: Führen Sie dies auf die Parseval'sche Gleichung zurück, indem Sie $\overline{w}z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ als Linearkombination von Quadraten von Beträgen komplexer Zahlen schreiben.

AUFGABE 21.5 (3 Punkte) — Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine N Mal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$ und Fourierkoeffizienten c_k für $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $|c_k| = o(|k|^{-N})$ für $|k| \to \infty$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 15.3 und ihre Lösung.