Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 20

Abgabe in den Übungen vom 3. und 4. Dezember 2008

AUFGABE 20.1 (4 Punkte) — Seien I und J abzählbare Mengen und sei $f\colon I \times J \to I$ eine Abbildung. Sei weiter $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in J. Mit einem $x \in I$ definieren wir eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $X_0 = x$ und $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

AUFGABE 20.2 (4 Punkte) — Berechnen Sie zur Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \qquad p, q \in (0,1),$$

die n-fache Potenz P^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Limes $\lim_{n\to\infty} P^n$, wenn dieser existiert.

Hinweis: Diagonalisieren Sie P oder finden Sie geeignete rekursive Gleichungen.

AUFGABE 20.3 (4 Punkte) — Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, gleichförmig auf $\{-1,0,1\}$ verteilter Zufallsvariablen, und seien weiter $S_0 = 0$ sowie

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad \text{und} \qquad M_n = \max_{j=0,\dots,n} S_j \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Ketten $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(S_n, M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovsch sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Übergangsmatrix.

Hinweis: Eventuell ist Aufgabe 20.1 hilfreich.

AUFGABE 20.4 (DIFFUSIONSMODELL VON BERNOULLI-LAPLACE) (4 Punkte) — In zwei Behältern A und B befinden sich s schwarze und w weiße Kugeln ($w \leq s$), wobei s Kugeln in Behälter A liegen. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird aus beiden Behältern zufällig und unabhängig voneinander je eine Kugel gezogen und in den jeweils anderen Behälter gelegt. Die Zufallsvariable X_n beschreibe die Anzahl der weißen Kugeln in A nach dem Zeitpunkt n.

(i) Ermitteln Sie die Übergangsmatrix der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Sei nun die Startverteilung

$$\nu(i) = \frac{\binom{s}{i}\binom{w}{w-i}}{\binom{s+w}{w}}, \qquad i = 0, 1, \dots, w,$$

gegeben. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von X_n.