Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 1

Abgabe in den Übungen vom 16. bis 19. Oktober 2007

AUFGABE 1.1 (4 Punkte) — Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R})$. Definiere

$$f = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_d \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \text{durch} \qquad f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i).$$

Zeigen Sie, dass f in $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ liegt und dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x_i)\,\mathrm{d}x_i.$$

AUFGABE 1.2 (4 Punkte) — Es seien $F, G \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gegeben durch

$$F(x) = \Big(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \Big)^2, \qquad G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(i) Zeigen Sie, dass F und G differenzierbar sind mit $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von (i) den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

AUFGABE 1.3 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$J \colon \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \qquad J(f) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(z),$$

wohldefiniert ist, und untersuchen Sie J auf Monotonie, Linearität und Translationsinvarianz.

AUFGABE 1.4 (4 Punkte) — Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - x^2)(y-1)\sin(xy), & \text{falls } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ liegt, und berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.