Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 19

Abgabe in den Übungen vom 8. bis 11. Mai 2007

AUFGABE 19.1 (3 Punkte) — Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2}\mathrm{e}^{-x/n}, \qquad x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}^*.$$

Zeigen Sie, dass f_n gleichmäßig auf $[0,\infty)$ gegen Null konvergiert, aber dass $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gilt.

AUFGABE 19.2 (4 Punkte) — ABEL'SCHER GRENZWERTSATZ. Seien $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{C}$, sodass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ in dem Punkt $R \in (0,\infty)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe dann gleichmäßig in dem Intervall $[0,R]$ konvergiert, also dort eine stetige Funktion darstellt.

Hinweis: Benutzen Sie das Abel'sche Konvergenzkriterium.

AUFGABE 19.3 (4 Punkte) — SATZ VON MOIVRE-LAPLACE. Die *Binomialverteilung* mit Parametern $n \in \mathbb{N}^*$ und $p \in (0,1)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Bi}_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{n}\mathrm{Bi}_{n,\frac{1}{2}}\big(\lfloor n\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{n}\rfloor\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

wobei $\lfloor y \rfloor$ die kleinste ganze Zahl $\le y$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Stirling-Formel, die Beziehung $\lim_{n\to\infty}(1 + c_1/\sqrt{n})^{c_2\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{c_1 c_2}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sowie die Taylor-Approximation $\log(1+h) = h - h^2/2 + O(h^3)$ für $h \to 0$.

Bemerkung: Die rechte Seite ist die Dichte der Standardnormalverteilung. Die Konvergenz ist tatsächlich gleichmäßig auf Kompakta, also gibt es auch eine integrierte Version der Aussage. Diese nennt man oft den *Satz von Moivre-Laplace*; er ist ein Spezialfall des *Zentralen Grenzwertsatzes* der Wahrscheinlichkeitstheorie.

AUFGABE 19.4 (5 Punkte) —

(i) Ermitteln Sie das Taylorpolynom des Tangens im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der Ordnung fünf.

(ii) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe der Funktion $x \mapsto x^\alpha$ im Entwicklungspunkt $a \in (0,\infty)$, und zeigen Sie, dass sie diese Funktion darstellt.