Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 18

Abgabe in den Übungen vom 2. bis 4. Mai 2007

AUFGABE 18.1 (4 Punkte) — Ermitteln Sie eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ sowohl durch eine komplexe als auch durch eine reelle Partialbruchzerlegung und zeigen Sie, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Hinweis: Es gilt $1 + x^4 = (1 - \sqrt{2}x + x^2)(1 + \sqrt{2}x + x^2)$.

AUFGABE 18.2 (4 Punkte) — Seien $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sowie $n \in \mathbb{N}^*$. Wir setzen $h = \frac{b-a}{n}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\Big(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) + \frac{1}{2}f(b)\Big) + R, \qquad \text{wobei } |R| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Bemerkung. Dieses Ergebnis kann man als eine quantitative Variante der Aussage über Konvergenz von Riemannsummen gegen Riemannintegrale auffassen. Es liefert einen Algorithmus zur numerischen Berechnung von Integralen.

AUFGABE 18.3 (4 Punkte) — Berechnen Sie den Wert der Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_t^\infty \frac{1}{(x^2-4)x}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } t > 2.$$

AUFGABE 18.4 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{k=1}^\infty \Big[\Big(1 + \frac{x}{k}\Big)\mathrm{e}^{-x/k}\Big], \qquad x \in (0, \infty),$$

wobei $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$ die Euler-Mascheroni-Konstante von Aufgabe 17.3 ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung aus der Vorlesung:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \qquad x \in (0, \infty),$$