Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 17

Abgabe in den Übungen vom 12. und 13. November 2008

AUFGABE 17.1 (4 Punkte) — Seien $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{Z}) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit $\widetilde{\mathbb{P}}$ bzw. $\widetilde{\mathbb{P}}_n$ bezeichnen wir die Einschränkungen auf die Potenzmenge von $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen:

(i) $\mathbb{P} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n$,

(ii) $\widetilde{\mathbb{P}} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}_n$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\{k\}) = \mathbb{P}(\{k\})$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}$.

AUFGABE 17.2 (VERTEILUNGSKONVERGENZ UND STETIGE BILDER) (3 Punkte) — Seien $(E_1, \mathtt{d}_1)$ und $(E_2, \mathtt{d}_2)$ metrische Räume, und sei $h\colon E_1 \to E_2$ eine Borel-messbare Funktion, so dass die Unstetigkeitsmenge $\mathcal{U}_h$ messbar sei. Ferner seien $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf E_1 mit $\mathbb{P}(\mathcal{U}_h) = 0$ und $\mathbb{P} = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Bildmaße $\mathbb{P}_n \circ h^{-1}$ gegen das Bildmaß $\mathbb{P} \circ h^{-1}$ schwach konvergieren.

AUFGABE 17.3 (3 Punkte) — Sei $\Phi = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\colon (\mu, \sigma^2) \in L\}$ eine Familie von Normalverteilungen, wobei $L \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ eine Indexmenge ist. Zeigen Sie, dass Φ genau dann straff ist, wenn L beschränkt ist.

AUFGABE 17.4 (3 Punkte) — Mit $\mathcal{C}$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ sei $\pi_{t_1,\dots,t_m}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^m$ die Projektionsabbildung $f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_m))$.
Seien $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass f_n genau dann punktweise für $n \to \infty$ gegen f konvergiert, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$ die Bildmaße $\delta_{f_n} \circ \pi_{t_1,\dots,t_m}^{-1}$ schwach gegen das Bildmaß $\delta_f \circ \pi_{t_1,\dots,t_m}^{-1}$ konvergieren.

AUFGABE 17.5 (3 Punkte) — Mit $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Benutzen Sie den Satz von Prohorov, um zu zeigen, dass das Variationsproblem

$$\inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})} \int \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

mindestens einen Minimierer besitzt.
Hinweis: Wählen Sie eine minimierende Folge, benutzen Sie den Satz von Prohorov, um einen Häufungspunkt zu erhalten, und zeigen Sie, dass er ein Minimierer ist. Für jedes $K > 0$ existiert ein $R > 0$ mit $1 \leq \varphi(x)/K$ für alle $|x| > R$.