Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 17

Abgabe in den Übungen vom 24. bis 27. April 2007

Aufgabe 17.1 (3 Punkte) — Integral-Vergleichskriterium für Reihen. Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Zeigen Sie, dass dann das Integral $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.

Aufgabe 17.2 (3 Punkte) — Entscheiden Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

konvergiert oder nicht.

Aufgabe 17.3 (4 Punkte) — Euler-Mascheroni'sche Konstante. Für $N \in \mathbb{N}^*$ definieren wir

$$C_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N.$$

(i) Zeigen Sie, dass $C_N \in (0,1)$ für jedes $N \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Zeigen Sie, dass C_N für $N \to \infty$ konvergiert.

Hinweis: Lassen Sie sich bei (i) von der Lösung von Aufgabe 17.1 inspirieren, und zeigen Sie bei (ii), dass $|C_{N+1} - C_N|$ über $N \in \mathbb{N}^*$ summierbar ist.

Bemerkung: Der Grenzwert $\gamma = \lim_{N\to\infty} C_N$ heißt die *Euler-Mascheroni'sche Konstante*.

Aufgabe 17.4 (3 Punkte) — Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)^2}$. In welchen Intervallen ist dies möglich?

Aufgabe 17.5 (3 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^{-s}\sin x\,\mathrm{d}x$ für jedes $s \in (0,\infty)$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$ für jedes $\alpha \in (1,\infty)$ konvergiert.