Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 16

Abgabe in den Übungen vom 17. bis 20. April 2007

Klausur-Erinnerung:

Am 14. April findet die Dritte Klausur zur Vorlesung Analysis A des WS06/07 statt, und zwar ab 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr. Dies ist zugleich die (einzige) Modulklausur für die Lehramtsstudent(inn)en, die nach der neuen Modulstruktur studieren. Da höchstens etwa 50 Teilnehmer(innen) erwartet werden, werden alle Teilnehmer im Großen Hörsaal in der Jahnallee schreiben (nicht evtl. im Hörsaal Süd).

AUFGABE 16.1 (3 Punkte) — Wir betrachten die Euler'sche Betafunktion von Aufgabe 15.4. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt:

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)^{2x-1}\cos(\varphi)^{2y-1}\,\mathrm{d}\varphi.$$

AUFGABE 16.2 (3 Punkte) — Man berechne die Partialbruchzerlegung von $\frac{z^7+1}{z^5+z^3}$.

AUFGABE 16.3 (4 Punkte) — Man zeige, dass gilt:

$$\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{z+k}, \qquad n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}).$$

AUFGABE 16.4 (3 Punkte) — Entscheiden Sie jeweils, ob die beiden Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}\sin x$ und $x \mapsto \frac{1}{x}|\sin x|$ über $(0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind.

AUFGABE 16.5 (3 Punkte) — HÖLDER'SCHE UNGLEICHUNG FÜR RIEMANN-INTEGRALE. Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für je zwei Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $f \cdot g$, $|f|^p$ und $|g|^q$ Riemann-integrierbar sind, gilt:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \Big(\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_0^1 |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q}.$$