Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 15

Abgabe in den Übungen vom 29. und 30. Oktober 2008

AUFGABE 15.1 (3 Punkte) — Es sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $(0,\infty)$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n eine zum Parameter λ_n Poisson-verteilte Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit Eins die Ungleichung $X_n \geq n$ nur endlich oft eintritt.

AUFGABE 15.2 (3 Punkte) — Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ und $Y, Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsgrößen, so dass X_n und Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Ferner gelte $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ und $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ fast sicher, und es gelte $\mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(Y = y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

AUFGABE 15.3 (TRANSIENZ DER UNSYMMETRISCHEN IRRFAHRT) (3 Punkte) — Sei $p \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die die Werte 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$ annehmen. Wir betrachten die Folge der Partialsummen, also $S_0 = 0$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins nur endlich oft zum Ursprung zurückkehrt.

AUFGABE 15.4 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass im Falle, dass der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum abzählbar ist, aus stochastischer Konvergenz die fast sichere folgt.

AUFGABE 15.5 (4 Punkte) — Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter Eins Poisson-verteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie, dass fast sicher gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log n}{\log n} X_n = 1.$$