Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 15

Abgabe **nur**, wenn notwendig zur Erfüllung des Hausarbeitskriteriums

AUFGABE 15.1 (4 Punkte) — Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = x^2 + xy - y - z \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass durch $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine globale Karte von M gegeben ist.

AUFGABE 15.2 (4 Punkte) — Definiere drei Funktionen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) = x_1x_3 - x_2^2, \qquad f_2(x) = x_2x_4 - x_3^2 \qquad \text{und} \qquad f_3(x) = x_1x_4 - x_2x_3,$$

wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Zeigen Sie, dass $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \colon f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

AUFGABE 15.3 (4 Punkte) — Seien

$$A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \le 1\Big\}$$

und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das durch $F(x,y,z) = (3x^2z, y^2 - 2x, z^3)$ gegebene Vektorfeld. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\mathbb{S}$, wobei $\nu\colon \partial A \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheits-Normalenfeld von A sei.

AUFGABE 15.4 (4 Punkte) — Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $0 \in A^\circ$, und sei $\alpha(x)$ der Winkel zwischen dem Ortsvektor $x \in \partial A$ und dem äußeren Einheits-Normalenvektor $\nu(x)$ an ∂A. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial A} \frac{\cos(\alpha(x))}{\|x\|^{d-1}} \, \mathbb{S}(\mathrm{d}x) = \omega_d$$

gilt, wobei ω_d die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$ ist.

Hinweis: Wenden Sie den Gauß'schen Integralsatz an auf das Vektorfeld $F(x) = x/\|x\|^d$ und die Menge $A_\varepsilon = \{x \in A \colon \|x\| \ge \varepsilon\}$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$.