Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 15

Abgabe in den Übungen vom 10. bis 13. April 2007

Aufgabe 15.1 (4 Punkte) — Berechnen Sie für jedes $t \geq 0$ die Integrale

$$I_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad I_3(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

und jeweils ihre Grenzwerte für $t \to \infty$.

Aufgabe 15.2 (3 Punkte) — Finden Sie je eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \arctan(x)$ und $x \mapsto x \log x$.

Aufgabe 15.3 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{|k|\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Aufgabe 15.4 (3 Punkte) — Euler'sche Betafunktion. Zeigen Sie, dass für jedes $x, y \in (0,\infty)$ das Integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

konvergiert. (Die Funktion B heißt die Euler'sche Betafunktion.)

Aufgabe 15.5 (4 Punkte) — Wie in Aufgabe 13.3 betrachten wir die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big[(x^2-1)^n\big].$$

Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m},$$

wobei $\delta_{n,m} = 1$, falls $n = m$, und $\delta_{n,m} = 0$, falls $n \neq m$, das *Kronecker-Symbol* bezeichnet.