Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. Wolfgang König

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 14

Abgabe am 22. bis 24. Juli 2008

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

AUFGABE 14.1 (3 Punkte) — REDUKTION DER VARIANZ. Es sei X eine quadratintegrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass die Varianz von $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ nicht größer ist als die von X.

AUFGABE 14.2 (4 Punkte) — BEDINGTE CAUCHY-SCHWARZ-UNGLEICHUNG. Zeigen Sie als Folgerung aus der bedingten Jensen-Ungleichung, dass für alle quadratintegrierbaren Zufallsgrößen X, Y gilt:

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{A}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{A}]\, \mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{A}].$$

AUFGABE 14.3 (4 Punkte) — BEDINGTE HÖLDER'SCHE UNGLEICHUNG. Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und seien $X \in \mathcal{L}^p$ und $Y \in \mathcal{L}^q$ zwei Zufallsgrößen. Benutzen Sie Satz 7.3.29, um zu zeigen, dass fast sicher gilt:

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}]^{\frac{1}{p}}\, \mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}]^{\frac{1}{q}}.$$

AUFGABE 14.4 (5 Punkte) — Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Lebesgue-Dichte f, und sei $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Ferner sei

$$\mathcal{C} = \big\{ D \cup (-D) \colon D \in \mathcal{B}([0, \infty)) \big\}$$

die σ-Algebra der am Nullpunkt gespiegelten Mengen, wobei $\mathcal{B}([0, \infty))$ die Spur-Borel-σ-Algebra auf $[0, \infty)$ sei und $(-D) = \{-x \colon x \in D\}$. Betrachte die Zufallsgröße Z, definiert durch

$$Z(x) = \begin{cases} \frac{Y(x)f(x) + Y(-x)f(-x)}{f(x) + f(-x)}, & \text{falls } f(x) + f(-x) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $Z = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{C}]$ fast sicher.
2. Bestimmen Sie $\mathbb{P}([1, 3] \mid \mathcal{C})$ in dem Fall, wo f eine gerade Funktion ist.