Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 14— Zweites Extrablatt

Abgabe in den Übungen vom 2. bis 5. April 2007

Zum Übungsscheinkriterium:

Die Punkte, die auf diesem Blatt erzielt werden, kann man sich als Zusatzpunkte entweder für die zweite Hälfte dieses Semesters oder für die erste Hälfte des nächsten Semesters anrechnen. Das zweite Hausaufgabenkriterium im Wintersemester 2006/07 lautet also, dass 50 Prozent der Punkte der Blätter 8 bis 13 (also 48 von 96 Punkten) erzielt werden müssen.

Aufgabe 14.1 (4 Punkte) — Bestimmen Sie für alle rellen Werte der Parameter a und b sämtliche lokalen und globalen Extremwerte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + ax^2 + bx.$$

Aufgabe 14.2 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ gilt, wobei

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{und} \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die *p-Norm* bzw. die *Supremumsnorm* definiert.

Aufgabe 14.3 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational}, \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 14.4 (4 Punkte) — Seien $a < b < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn die Einschränkungen von f auf $[a,b]$ und $[b,c]$ Riemann-integrierbar sind, und dass dann gilt:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 14.5 (3 Punkte) — Berechnen Sie explizit durch die Betrachtung der Riemannsumme mit äquidistanten Unterteilungen und Stützstellen an den linken Intervallrändern für jedes $a > 0$ den Wert des Riemann-Integrals

$$\int_0^a \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$