Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 13

Abgabe am 15. bis 17. Juli 2008

AUFGABE 13.1 (3 Punkte) — (LINEARITÄT UND MONOTONIE DER BEDINGTEN ERWARTUNG) Seien X und Y zwei integrierbare Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und sei $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\lambda X + Y \mid \mathcal{A}] = \lambda \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] + \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{A}]$ fast sicher.

(ii) Falls $X \leq Y$ fast sicher, so gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{A}]$ fast sicher.

AUFGABE 13.2 (4 Punkte) — (BEDINGTE ERWARTUNG ALS ORTHOGONALPROJEKTION) Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und sei $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{A}$-messbare Zufallsgröße $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ gilt:

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ fast sicher.

AUFGABE 13.3 (4 Punkte) — Das Intervall $[0, 1]$ werde durch einen uniform verteilten Teilungspunkt $X \in [0, 1]$ in zwei Teile zerlegt. Danach werde das größere der beiden Teilintervalle erneut durch einen auf diesem Teilintervall uniformen Punkt Y zerlegt. Es sei A das Ereignis, dass sich aus den drei Teilstücken ein Dreieck konstruieren lässt. Geben Sie ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A.

AUFGABE 13.4 (5 Punkte) — Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, und sei $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$. Wir erinnern daran, dass $\mathcal{B}_n$ die Borel-σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Betrachte das System

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{B}_n \colon \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ gilt } (x_1, \dots, x_n) \in A \Longrightarrow (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in A\big\}.$$

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P} = \mu^{\otimes n}$ das n-fache Produktmaß eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{B}_n$ ist.

2. Zeigen Sie, dass für jede Zufallsgröße $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X\big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big)$$

fast sicher gleich dem bedingten Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{A}$ ist.