Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 13

Abgabe in den Übungen vom 22. bis 25. Januar 2008

AUFGABE 13.1 (3 Punkte) — Wir betrachten die Kugelschale $S_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon r \leq \|x\| \leq R\}$, wobei $0 < r < R$. Ferner sei λ_4 das vierdimensionale Lebesgue-Maß. Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale.

$$(i) \quad \int \mathrm{e}^{-\|x\|^2} \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(\mathrm{d}x), \qquad (ii) \quad \int x_i^2 \mathrm{e}^{-\|x\|^2} \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(\mathrm{d}x),$$

$$(iii) \quad \int \log \|x\| \mathbb{1}_{S_{r,R}}(x)\, \lambda_4(\mathrm{d}x).$$

AUFGABE 13.2 (4 Punkte) — Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ eine integrierbare Funktion mit $c := \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in (0, \infty)$ und $\alpha \in (0, \infty)$ eine Konstante. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega n \log(1 + (f/n)^\alpha) \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha \in (0,1), \\ c & \text{für } \alpha = 1, \\ 0 & \text{für } \alpha \in (1, \infty). \end{cases}$$

Hinweise: Für $\alpha \in (0, 1)$ benutze man das Lemma von Fatou, für $\alpha \in [1, \infty)$ den Satz von der beschränkten Konvergenz; außerdem zeige und benutze man $\log(1 + x^\alpha) \leq \alpha x$ für $x \geq 0$.

AUFGABE 13.3 (3 Punkte) — Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, und es existiere eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

AUFGABE 13.4 (3 Punkte) — Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall und $f \colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $x \in I$ ist $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\omega, \cdot)$ differenzierbar mit Ableitung f'.
3. Die Abbildung $\sup_{x\in I} |f'(\cdot, x)|$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Zeigen Sie, dass dann $f'(\cdot, x)$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt und die Funktion $F(x) = \int f(\omega, x)\, \mu(\mathrm{d}\omega)$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = \int f'(\omega, x)\, \mu(\mathrm{d}\omega).$$

AUFGABE 13.5 (3 Punkte) — Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Setze $M(t) = \int \mathrm{e}^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x) \in [0, \infty]$. Sei $I = \{t \in \mathbb{R} \colon M(t) < \infty\} \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass M im Inneren von I beliebig oft differenzierbar ist mit

$$M^{(k)}(t) = \int x^k \mathrm{e}^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x) \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Verwenden Sie dies, um die Konvexität von $\log M$ auf I zu zeigen.

Bitte beachten Sie die Hinweise zur Klausur auf der Rückseite.

Hinweise zur Klausur: Am Samstag, dem 26. Januar, wird im Großen Hörsaal des Carl-Ludwig-Instituts in der Liebigstr. unsere Klausur durchgeführt werden. Der Beginn ist ist um 8:15 Uhr, die geplante Dauer beträgt 120 Minuten. Einziges erlaubtes Hilfsmittel wird ein einseitig von eigener Hand mit beliebigem Text beschriebenes Blatt Papier der Größe DIN A4 sein. Bringen Sie bitte einen Lichtbildausweis, Schreibgerät (keine Bleistifte) und genügend freies Papier mit. Der Stoff der Klausur umfasst den Inhalt der Aufgabenblätter 1 bis 12 sowie den Inhalt des Skriptes bis einschließlich Abschnitt 3.5.

Die Ergebnisse der Klausur werden ab dem späten Nachmittag des 26. Januar auf der Homepage der Vorlesung verfügbar sein, die Klausur selber wird in den Übungen der letzten Semesterwoche besprochen und zurückgegeben werden.