Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 12

Abgabe in den Übungen vom 18. bis 24. Januar 2007

AUFGABE 12.1 (4 Punkte) — Bilden Sie die Ableitungen der Funktionen $f_1, \dots, f_4$ in ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}, \qquad f_3(x) = \arcsin(x), \qquad f_4(x) = \sqrt{\frac{2+\cos x}{2-\cos x}}.$$

AUFGABE 12.2 (4 Punkte) — Es sei $f(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ für $x \in [0, \infty)$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f in Termen des Logarithmus und der Quadratwurzel. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} sowohl aus dieser expliziten Formel als auch mit Hilfe des Satzes von der Ableitung der Umkehrfunktion. Zeigen Sie, dass beide Resultate übereinstimmen.

DEFINITION: Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nennen wir eine Funktion f, die in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert ist, *n Mal differenzierbar*, wenn die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ von f differenzierbar ist, und nennen $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die *n-te Ableitung von f*. Ferner setzen wir $f^{(0)} = f$ und nennen f Null Mal differenzierbar.

AUFGABE 12.3 (3 Punkte) — (LEIBNIZ-REGEL) Zeigen Sie mit Hilfe einer Vollständigen Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und je zwei n-mal differenzierbare Funktionen f und g gilt:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

AUFGABE 12.4 (2 Punkte) —

(i) Berechnen Sie

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{\operatorname{arcosh}(x)}{\sqrt{x-1}}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\arctan(x) = x + O(x^3)$ für $x \to 0$ gilt.

AUFGABE 12.5 (3 Punkte) — Benutzen Sie die Additionstheoreme, um den exakten Wert von $\sin(\frac{\pi}{5})$ zu berechnen.