Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 11

Abgabe in den Übungen vom 8. bis 11. Januar 2008

AUFGABE 11.1 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit der Eigenschaft, dass ein $a > 0$ existiert mit $\mu(A) \notin (0, a)$ für jedes $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p' < p \leq \infty$ gilt: $\mathcal{L}^{p'}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

AUFGABE 11.2 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum und $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare numerische Funktion. Zeigen Sie, dass gilt:

(i)
$$\sup\{a \geq 0\colon \mu(|f| \geq a) > 0\} = \min\{c \in [0, \infty]\colon |f| \leq c \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(ii) Falls $\|f\|_p < \infty$ für ein $p > 1$, dann gilt $\liminf_{r\to\infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$.

AUFGABE 11.3 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine nichtnegative messbare numerische Funktion. Zeigen Sie Folgendes.

(i) Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn $\sum_{n=1}^\infty \mu(f \geq n) < \infty$.

(ii) Falls f integrierbar ist, so gilt $\lim_{n\to\infty} n\mu(f \geq n) = 0$.

(iii) Falls $f(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$, so gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu(f \geq n) \in [0, \infty]$.

AUFGABE 11.4 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_\Omega f(\omega) g(\omega) \, \mu(\mathrm{d}\omega), \qquad [f], [g] \in L^2(\mu),$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ definiert ist.