

## Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 11

Abgabe in den Übungen vom 8. bis 11. Januar 2008

AUFGABE 11.1 (4 Punkte) — Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum mit der Eigenschaft, dass ein  $a > 0$  existiert mit  $\mu(A) \notin (0, a)$  für jedes  $A \in \mathcal{F}$ . Zeigen Sie, dass für  $1 \leq p' < p \leq \infty$  gilt:  $\mathcal{L}^{p'}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

AUFGABE 11.2 (4 Punkte) — Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein beliebiger Maßraum und  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine messbare numerische Funktion. Zeigen Sie, dass gilt:

(i)

$$\sup\{a \geq 0: \mu(|f| \geq a) > 0\} = \min\{c \in [0, \infty]: |f| \leq c \mu\text{-fast überall}\}.$$

(ii) Falls  $\|f\|_p < \infty$  für ein  $p > 1$ , dann gilt  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$ .

AUFGABE 11.3 (4 Punkte) — Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein endlicher Maßraum und  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine nichtnegative messbare numerische Funktion. Zeigen Sie Folgendes.

(i) Die Funktion  $f$  ist genau dann integrierbar, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n) < \infty$ .

(ii) Falls  $f$  integrierbar ist, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(f \geq n) = 0$ .

(iii) Falls  $f(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$ , so gilt  $\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n) \in [0, \infty]$ .

AUFGABE 11.4 (4 Punkte) — Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_{\Omega} f(\omega)g(\omega) \mu(d\omega), \quad [f], [g] \in L^2(\mu),$$

ein Skalarprodukt auf  $L^2(\mu)$  definiert ist.