Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

# Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 10

Abgabe am 24. bis 26. Juni 2008

AUFGABE 10.1 (4 Punkte) — Es seien zufällige Punkte $0 < T_1 < T_2 < \dots$ auf der positiven Achse gegeben. Für $0 \leq a < b$ sei $N_{(a,b]}$ die Zahl jener dieser Punkte, die im Intervall $(a, b]$ liegen. Die Familie der $N_{(a,b]}$ mit $0 \leq a < b$ erfülle die Axiome (P1) bis (P5) aus Abschnitt 4.4.
Wir betrachten die Abstände $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ (wobei $k \in \mathbb{N}$ und $T_0 = 0$) zwischen aufeinanderfolgenden dieser zufälligen Punkte. Zeigen Sie, dass $\tau_2$ und $\tau_1$ unabhängige, zum Parameter $\alpha = \mathbb{E}(N_{(0,1]})$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha t_2} 1_{\{0 \leq t_1 < t_2\}}$ eine Dichte des Zufallsvektors $(T_1, T_2)$ ist.

*Bemerkung:* Analog kann man auch zeigen, dass alle $\tau_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ unabhängige, zum Parameter $\alpha = \mathbb{E}(N_1)$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind. Dies zeigt, dass die in Satz 4.4.2 gegebene Konstruktion sogar äquivalent zu dem axiomatischen Zugang via (P1) bis (P5) ist.

AUFGABE 10.2 (4 Punkte) — Gegeben seien unabhängige zum Parameter $\alpha$ exponentialverteilte Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$. Wir setzen $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(M_n \leq x + \frac{\log n}{\alpha}\Big) = \exp(-\mathrm{e}^{-\alpha x}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

AUFGABE 10.3 (4 Punkte) — Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit dem selben Erwartungswert $\mathbb{E}(X_n) = E$ und $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $|i - j| > m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ferner existieren Konstanten $C > 0$ und $\beta < 1$ mit $\mathbb{V}(X_n) \leq Cn^\beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\tfrac{1}{n} S_n - E| \geq \varepsilon) = 0,$$

wobei $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

AUFGABE 10.4 (4 Punkte) — Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ setzen wir

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Benutzen Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahlen, um zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen $f$ konvergiert.

*Hinweise:* Die $f_n$ werden die *Bernstein-Polynome* genannt. In dieser Aufgabe geben Sie einen konstruktiven Beweis des *Weierstraßschen Approximationssatzes*.