Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 10

Abgabe in den Übungen vom 18. bis 21. Dezember 2007

AUFGABE 10.1 (3 Punkte) — Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, und seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen. Es gelte $g(\omega) \neq 0$ für jedes $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass f/g messbar ist.

AUFGABE 10.2 (2 Punkte) — Prüfen Sie die *Dirichlet'sche Sprungfunktion* $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ auf Lebesgue-Integrierbarkeit, und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\,\lambda(\mathrm{d}x)$.

AUFGABE 10.3 (2 Punkte) — Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann ist $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass zwei Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann μ-fast überall gleich sind, wenn $f(x_n) = g(x_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

AUFGABE 10.4 (5 Punkte) — Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$E_n := \bigcup_{c_1,\dots,c_n \in \{0,2\}} \Big[\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{3^k}, \, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{3^k} \Big]$$

und

$$f_n(x) := \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \int_0^x \mathbb{1}_{E_n}(t)\,\lambda(\mathrm{d}t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin sei $E := \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, und λ bezeichne das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(i) E ist eine kompakte, überabzählbare λ-Nullmenge.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Mengen E_n fallend ineinander enthalten sind.

(ii) Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige, monotone Funktion $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus E$.

Tipp: Finden Sie eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \le M 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

(i) Das sogenannte *Cantorsche Diskontinuum* E entsteht aus $[0,1]$ durch sukzessives Wegnehmen der jeweiligen mittleren Drittel der Teilintervalle.

(ii) Für die Funktion F gilt *nicht* für alle $a, x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,\lambda(\mathrm{d}t).$$

AUFGABE 10.5 (4 Punkte) — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und f eine integrierbare numerische Funktion. Zeigen Sie, dass $|f| < \infty$ fast überall gilt und dass eine reellwertige integrierbare Funktion g existiert mit $f = g$ fast überall.