Lösungsskizzen zur Übungsscheinklausur zur Vorlesung Mass- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ **(1 P.)** und $\mu(\emptyset) = 0$ **(1 P.)** sind klar. Zur σ-Additivität: Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen. Dann gilt wegen Monotonie

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_n(A_k) =: (*). \qquad (\mathbf{2P}.)$$

Wegen $\mu_n(A_k) \le \mu(A_k)$ für jedes n, k gilt $(*) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. **(3 P.)**
Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt $(*) \ge \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^N \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^N \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^N \mu(A_k)$, also auch $(*) \ge \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ **(3 P.)**, und dies zeigt die σ-Additivität.

Aufgabe 2 Nach dem Cavalieri'schen Prinzip ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_3(K) &\overset{(\mathbf{4P}.)}{=} \int_D x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{4P}.)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^2 \int_0^{2-2x} \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^2(2-2x) = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (\mathbf{2P}.).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Da $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, gilt $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{C}))$, also gilt '$\subset$'. **(4 P.)**
$\sigma(\sigma(\mathcal{C}))$ ist enthalten in jeder σ-Algebra, die $\sigma(\mathcal{C})$ enthält **(3 P.)**. Da $\sigma(\mathcal{C})$ eine solche ist, ist $\sigma(\sigma(\mathcal{C}))$ auch in ihr enthalten, und das zeigt die umgekehrte Inklusion. **(3 P.)**

Aufgabe 4 O.B.d.A. ist μ nicht das Nullmaß. Die Abbildung $p \mapsto \|f\|_p$ ist wachsend, denn für $1 \le p \le q$ gilt auf Grund der Hölder'schen Ungleichung mit $1/(q/p) + 1/[q/(q-p)] = 1$:

$$\|f\|_p = \Big(\int \mathbb{1}_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \le \Big(\int \mathbb{1}_\Omega^{qp/(q-p)} \,\mathrm{d}\mu\Big)^{(q-p)/qp} \Big(\int |f|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} \le \|f\|_q,$$

wobei im letzten Schritt $\mu(\Omega) \le 1$ benutzt wurde. Alternativ kann man die Jensen'sche Ungleichung für das W'-Maß $\mathbb{P} = \mu/\mu(\Omega)$ und die konvexe Abbildung $y \mapsto y^{q/p}$ benutzen:

$$\|f\|_p = \mu(\Omega)^{1/p}\mathbb{E}(|f|^p)^{1/p} \le \mu(\Omega)^{1/p}\mathbb{E}(|f|^q)^{1/q} = \|f\|_q \mu(\Omega)^{1/p-1/q} \le \|f\|_q,$$

da $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ge 0$. Also ist $\sup_{p\in[1,\infty)} \|f\|_p = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$. **(5 P.)**
Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $|f| \le \|f\|_\infty$ auf A und $\mu(A^c) = 0$. Dann ist für jedes $p \in [1,\infty)$:

$$\|f\|_p = \Big(\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \le \Big(\int_A \|f\|_\infty \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \le \mu(A)^{1/p}\|f\|_\infty \le \|f\|_\infty. \qquad (\mathbf{5P}.)$$

Aufgabe 5 Man identifiziert das Maß $\lambda_{[0,1]} \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{-1}$ als das Dirac-Maß δ_1 **(insges. 7 P.)**, indem man es auf eine Menge A anwendet und die Fallunterscheidung $1 \in A$ und $1 \notin A$ macht und beachtet, dass $\lambda_{[0,1]}((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,1]) = 1$ **(2 P.)** sowie $\lambda_{[0,1]}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ **(2 P.)** gilt. Also ist

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda_{[0,1]} \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{-1} = \int f \,\mathrm{d}\delta_1 = f(1) = 2. \qquad (\mathbf{3P}.)$$

Alternativ kann man die Integrationsformel für das Bildmaß benutzen:

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda_{[0,1]} \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{-1} \overset{(\mathbf{5P.})}{=} \int f(\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x))\, \lambda_{[0,1]}(\mathrm{d}x) \overset{(\mathbf{3P.})}{=} \int_{[0,1]} f(1)\, \mathrm{d}\lambda_{[0,1]} = f(1) = 2, \qquad (\mathbf{2P.})$$

denn die Funktion $f \circ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ ist $\lambda_{[0,1]}$-fast überall gleich $f(1)$.

Aufgabe 6 Wegen

$$\int_1^\infty \Big|\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\Big|\,\mathrm{d}x \geq \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{x}{\sqrt{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{R\to\infty} \log x\Big|_1^R = \infty \qquad (\mathbf{5P.})$$

existiert das uneigentliche Riemann-Integral über $(0,\infty)$ nicht, wegen (Anti-)Symmetrie auch nicht über $\mathbb{R}$. **(2 P.)** Da der Integrand stetig ist, also über jedes Kompaktum Riemann- und daher auch Lebesgue-integrierbar ist, existiert sein Lebesgue-Integral über $\mathbb{R}$ ebenfalls nicht. **(3 P.)**

Aufgabe 7 Mit Hilfe des Transformationssatzes für lineare Funktionen und des Satzes über rotationssymmetrische Funktionen erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\|Ax\|}\|Ax\|^{1-d}\,\lambda_d(\mathrm{d}x) &\overset{(\mathbf{4P.})}{=} \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\|y\|}\|y\|^{1-d}\,\lambda_d(\mathrm{d}y)\\ &\overset{(\mathbf{4P.})}{=} \frac{1}{|\det(A)|}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r}r^{1-d}d\tau_d r^{d-1}\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2P.})}{=} \frac{d\tau_d}{|\det(A)|},\end{aligned}$$

wobei $\tau_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$ das Volumen der Einheitskugel ist.

Aufgabe 8 Mit Hilfe der Dreiecksungleichung (Minkowski-Ungleichung) und der Hölder'schen Ungleichung erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_1 &\overset{(\mathbf{2P.})}{=} \|f_n(g_n-g) + g(f_n-f)\|_1 \overset{(\mathbf{3P.})}{\leq} \|f_n(g_n-g)\|_1 + \|g(f_n-f)\|_1\\ &\overset{(\mathbf{3P.})}{\leq} \|f_n\|_p\|g_n-g\|_q + \|g\|_q\|f_n-f\|_p.\end{aligned}$$

Da $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $\|f_n\|_p \leq \|f\|_p + \|f_n - f\|_p$ beschränkt ist **(2 P.)**, konvergiert die rechte Seite gegen Null, also konvergiert $f_n g_n$ im ersten Mittel gegen fg.

Aufgabe 9 wffw