Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. Wolfgang König
19. Juli 2008
8:15 – 10:15 Uhr

Übungsscheinklausur
zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsleiter(in):

- Tragen Sie bitte zu allererst die obigen Angaben ein, aber sonst nichts auf dieser Seite.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Für das Übungsscheinkriterium gilt: Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte									

Gesamtpunktzahl:

10 P. **Aufgabe 1** —— Es seien X und Y zwei unabhängige, zu den Parametern $\alpha \in (0, \infty)$ bzw. $\beta \in (0, \infty)$ exponentiell verteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X < Y)$.

10 P. **Aufgabe 2** —— Es seien $T, X_1, X_2, X_3, \dots$ unabhängige reellwertige integrierbare Zufallsgrößen, und T sei $\mathbb{N}_0$-wertig. Wir setzen voraus, dass die X_i alle die selbe Verteilung haben. Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $S = \sum_{i=1}^{T} X_i$ einen endlichen Erwartungswert besitzt.

10 P. **Aufgabe 3** —— Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest und σ eine auf der Menge $\mathfrak{S}_N$ aller Permutationen von $1, 2, \dots, N$ gleichförmig verteilte Zufallsvariable. Mit $F(\sigma)$ bezeichnen wir die Anzahl aller Fixpunkte von σ, d. h. die Anzahl aller $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $\sigma(i) = i$. Ermitteln Sie den Erwartungswert von $F(\sigma)$.

10 P. **Aufgabe 4** —— Im Viererpack eines Kakaotrunks sollte an jeder Packung ein Trinkhalm sein, der jedoch jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fehlt, defekt ist und einwandfrei ist, und zwar unabhängig für die vier Halme. Sei A das Ereignis, dass mindestens ein Trinkhalm fehlt und mindestens einer einwandfrei ist. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit von A.

10 P. **Aufgabe 5** —— Auf $\Omega = [0, \infty)$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit der Riemann-Dichte $\omega \mapsto \mathrm{e}^{-\omega}$ gegeben. Seien $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ fest, und wir definieren eine Zufallsgröße $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega) = (\omega/\alpha)^{1/\beta}$. Ermitteln Sie eine Riemann-Dichte von X.

10 P. **Aufgabe 6** —— Eine gewisse Krankheit kommt bei einem Prozent der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test, der bei 95 Prozent der Kranken anspricht, aber leider auch bei zehn Prozent der gesunden Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person tatsächlich krank, wenn der Test bei ihr anspricht? Zu der Aufgabenlösung gehört eine Angabe des benutzten Wahrscheinlichkeitsraumes.

10 P. **Aufgabe 7** —— Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit endlichen Varianzen und gemeinsamem Erwartungswert $E = \mathbb{E}(X_i) \in \mathbb{R}$. Es gelte $|\mathrm{cov}(X_i, X_j)| \leq |i - j|^{-2}$ für $i \neq j$ und $|\mathrm{cov}(X_i, X_j)| \leq 1$ für $i = j$. Wir setzen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n} S_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen E konvergiert.

10 P. **Aufgabe 8** —— Es sei X eine auf $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gleichförmig verteilte Zufallsgröße. Prüfen Sie X und $|X|$ auf Unkorreliertheit und auf Unabhängigkeit.

20 P. **Aufgabe 9** —— Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für “wahr” bzw. ein f für “falsch” in den Kasten vor der Aussage.

☐ Wenn zwei Zufallsgrößen je eine endliche Varianz haben, so auch ihre Summe.

☐ Für jedes $\alpha \in (1, \infty)$ kann man ein $c \in \mathbb{R}$ finden, sodass die Abbildung $x \mapsto c|x|^{-\alpha}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

☐ Die erzeugende Funktion der Summe zweier Zufallsgrößen ist immer das Produkt der erzeugenden Funktionen.

☐ Bei einem Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ sind die Ereignisse ‘Es gibt mehr der zufälligen Punkte im Zeitintervall $(0, 1]$ als im Zeitintervall $(1, 2]$’ und ‘Im Zeitintervall $(2, 3]$ gibt es keine der zufälligen Punkte’ unabhängig.

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden zwei Punkte abgezogen, bei Offenlassen werden weder Punkte gegeben noch abgezogen, und negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.