Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2007

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Trainingsblatt

Dieses Blatt enthält Aufgaben zum Stoff der Blätter 15 bis 26 und soll dem Training für die Klausur am 14. Juli dienen. Es wird ausdrücklich keine Aussage über die Relation der Schwierigkeit dieser Aufgaben zu den Klausuraufgaben gemacht. Auch wird keine Aussage darüber gemacht, ob die Verteilung der Themen der Klausuraufgaben ähnlich der dieses Trainingsblattes sei.

AUFGABE 0.1 Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende Funktion Riemann-integrierbar ist.

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

AUFGABE 0.2 Berechnen Sie für $n, m \in \mathbb{N}$ den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^n (1-x)^m \, \mathrm{d}x.$$

AUFGABE 0.3 Berechnen Sie für $a \in (0, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$ den Wert des Integrals

$$\int_0^1 x^a (\log x)^k \, \mathrm{d}x.$$

AUFGABE 0.4 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-n}.$$

AUFGABE 0.5 Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \Big) = \log 2.$$

AUFGABE 0.6 Zeigen Sie, dass für $N \to \infty$ gilt:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \log n} \sim \log(\log N).$$

AUFGABE 0.7 Berechnen Sie die Länge des Bogens

der Parabel	$y = x^2,$	$x \in [0, b],$
der Neil'schen Parabel	$\gamma(t) = (t^2, t^3),$	$t \in [0, T].$

Parametrisieren Sie beide Kurven auf Bogenlänge.

AUFGABE 0.8 Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, wobei

$$x_n = \Big(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big)^n \qquad \text{und} \qquad y_n = (1+(-1)^n)\frac{n+1}{n} + (-1)^n.$$

AUFGABE 0.9 Für $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $\mathrm{d}(n,m) = \frac{m+n}{mn}$, falls $m \neq n$ und $\mathrm{d}(n,m) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist, und charakterisieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge $A_n = \{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon \mathrm{d}(n,m) \leq 1 + \frac{1}{n}\}$, d. h. den abgeschlossenen Ball um n mit Radius $1 + \frac{1}{n}$.

AUFGABE 0.10 Bestimmen Sie je eine Partialbruchzerlegung von $x \mapsto \frac{x^4 - x^2}{x^6 + x^4}$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

AUFGABE 0.11 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ metrische Räume. Auf dem Produktraum $X = X_1 \times \cdots \times X_N$ betrachten wir die Metrik $\mathrm{d}(x,y) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}_i(x_i, y_i)$, wenn d_i die Metrik auf X_i ist, für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn jedes X_i kompakt ist.

AUFGABE 0.12 Sei X ein kompakter metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie, dass Y genau dann kompakt ist, wenn Y abgeschlossen ist.

AUFGABE 0.13 Sei X ein metrischer Raum und $f \colon [0,1) \to X$ stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{t\uparrow 1} f(t)$ existiert.

AUFGABE 0.14 Zeigen Sie, dass die Fourierreihe der Funktion $f(t) = |\sin t|$, $t \in \mathbb{R}$, gegeben ist durch

$$t \mapsto \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{4k^2 - 1}.$$

In welchen Sinnen konvergiert diese Reihe und wogegen?

AUFGABE 0.15 Zeigen Sie, dass die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ die folgende Darstellung besitzt:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\log t)^{z-1}\,\mathrm{d}t, \qquad z \in (0,\infty).$$

AUFGABE 0.16 Es sei $f \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = L \in \mathbb{R}$. Für jedes $r > 0$ konvergiere das Integral $\int_r^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass dann für alle $a, b \in (0,\infty)$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = L \log\frac{b}{a}.$$

AUFGABE 0.17 Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \exp(\frac{1}{\|x\| - \varepsilon})$, falls $\|x\| < \varepsilon$, und $f(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.

AUFGABE 0.18 Zeigen Sie, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, falls $(x,y) \neq 0$, und $f(0,0) = 0$, nicht im Ursprung stetig ist.

AUFGABE 0.19 Wir betrachten die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$, falls $(x,y) \neq 0$, und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ existiert, dass aber f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

AUFGABE 0.20 Es seien $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ und $c \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(t, x) = \frac{1}{\|x\|} f\Big(t + \frac{\|x\|}{c}\Big), \qquad t \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}^3,$$

eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung $\frac{1}{c^2} u_{tt} = \Delta u$ ist.

AUFGABE 0.21 Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte, und wir betrachten $u(x) = \frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte (d. h. Nullstellen des Gradienten) $x_0 \in \mathbb{R}^2$, und stellen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Entwicklungspunkt x_0 auf.

AUFGABE 0.22 Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, die einen strikten Minimierer besitzt, in dem sich unendlich viele kritische Punkte häufen, oder beweisen Sie, dass dies nicht möglich ist.

AUFGABE 0.23 Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) - 8x^2 - 4y^4$ im $\mathbb{R}^2$.

AUFGABE 0.24 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie, dass die Funktion g, definiert durch $g(x) = \sin(\|f(x)\|^2)$, in $\mathcal{C}^1(U \to \mathbb{R})$ liegt, und bestimmen Sie den Gradienten von g.

AUFGABE 0.25 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(U \to \mathbb{R})$. Ferner habe f in $x^* \in U$ ein lokales Maximum. Zeigen Sie, dass dann die Hesse'sche Matrix von f in x^* nichtpositiv definit ist.

AUFGABE 0.26 Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Stellen Sie eine Produktregel für die Ableitung von $fF\colon U \to \mathbb{R}^m$ auf, und beweisen Sie sie.