Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Erstes Extra-Übungsblatt

Abgabe in den Übungen vom 4. bis 10. Januar 2007

Dieses Blatt enthält Aufgaben zum Stoff der Blätter 1 bis 7. Die hier erzielten Punkte werden zu den in diesen Blättern erreichten Punkten hinzugezählt. Es wird nur für diejenigen Studierenden korrgiert, die noch Punkte in diesem Kriterium benötigen. Um das erste Hausaufgaben-Kriterium zum Scheinerwerb zu erfüllen, müssen also 56 Punkte aus den Blättern 1 bis 7 und diesem Blatt zusammen erzielt werden.

AUFGABE 0.1 (2 Punkte) — Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $(0,\infty)$, sodass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ gilt.

AUFGABE 0.2 (3 Punkte) — Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,\infty)$, sodass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ divergiert.

AUFGABE 0.3 (4 Punkte) — Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für je zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ gilt $(A\cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

(ii) Für je zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ gilt $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

AUFGABE 0.4 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist, die Menge aller Teilmengen (die *Potenzmenge*) aber nicht.

AUFGABE 0.5 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass jeder Kreis und jede Gerade in der erweiterten komplexen Ebene die Lösungsmenge einer Gleichung der Form

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0 \qquad \text{mit } a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \text{ und } |b|^2 > ac$$

ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Lösungsmenge einer solchen Gleichung immer ein Kreis oder eine Gerade ist.