

Maß- und Integrationstheorie: Trainingsblatt

Dieses Blatt enthält Aufgaben zum Stoff der Blätter 1 bis 12 und soll dem Training für die Klausur am 26. Januar dienen. Es wird ausdrücklich keine Aussage über die Relation der Schwierigkeit dieser Aufgaben zu den Klausuraufgaben gemacht. Auch wird keine Aussage darüber gemacht, ob die Verteilung der Themen der Klausuraufgaben ähnlich der dieses Trainingsblattes sei.

AUFGABE 0.1 — Es sei $-\infty < a < b < \infty$, und es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes λ auf $[a, b]$. Wir betrachten $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $F(x) = \int \mathbb{1}_{[a,x]} f \, d\lambda$.

(i) Zeigen Sie, dass F in $[a, b]$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass F in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar ist, wenn f in x_0 stetig ist.

AUFGABE 0.2 — Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\Omega} x_2 \lambda_4(dx)$, wobei λ_4 das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^4 ist und

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4: x_1 \in (0, 1), x_2 \in (0, 2), 0 < x_3 < x_1, 0 < x_4 < x_2 x_3\}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

AUFGABE 0.3 — Berechnen Sie das Volumen des Körpers im \mathbb{R}^3 , der begrenzt wird von der Fläche $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = x^2 + y^2\}$ und von der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 4 - 3x\}$.

AUFGABE 0.4 —

(i) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_K \frac{\lambda_2(dx)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \quad \text{wobei } K = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| < 1\}.$$

(ii) Es sei $C = (c_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$ eine symmetrische positiv definite reelle Matrix und $q(x) = \langle x, Cx \rangle$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{K_q} \frac{\lambda_2(dx)}{\sqrt{1 - q(x)}}, \quad \text{wobei } K_q = \{x \in \mathbb{R}^2: q(x) < 1\}.$$

AUFGABE 0.5 — Entscheiden Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, ob die Funktion $x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$ im $\mathcal{L}^1(\lambda_{d,K})$ liegt, wobei $\lambda_{d,K}$ das Lebesgue-Maß auf der d -dimensionalen Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| \leq 1\}$ ist.

AUFGABE 0.6 Es seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $1 < d < n$, und es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ paarweise verschiedene Punkte. Wir setzen $f(x) = \prod_{i=1}^n \|x - a_i\|$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $1/f$ im $\mathcal{L}^1(\lambda_d)$ liegt, d. h. dass $1/f$ über den ganzen \mathbb{R}^d integrierbar ist.

AUFGABE 0.7 — Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega\}: \omega \in \Omega)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega: A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

AUFGABE 0.8 — Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung zweier σ -Algebren keine σ -Algebra ist. Versuchen Sie dabei, mit einer möglichst kleinen Grundmenge auszukommen.

AUFGABE 0.9 — Es sei Ω eine abzählbare Menge und

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich.}\}.$$

Ferner definieren wir $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ durch $\mu(A) = 0$, falls A endlich ist, und $\mu(A) = \infty$ sonst. Zeigen Sie, dass μ ein in \emptyset stetiger Inhalt ist, aber kein Prämaß.

AUFGABE 0.10 — Betrachte $\varphi(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Borel-messbare Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann messbar bezüglich $\sigma(\varphi)$ ist, wenn f gerade ist (d. h. $f(x) = f(-x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt).

AUFGABE 0.11 — Es sei μ die Exponentialverteilung auf \mathbb{R} , d. h. μ habe die Dichte $t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t)$. Charakterisieren Sie das Bildmaß von μ unter der Abbildung $x \mapsto \alpha x$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 0.12 — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, so dass das Bildmaß $\mu \circ f^{-1}$ die Dichte φ besitze. Ermitteln Sie die Dichte des Bildmaßes $\mu \circ \sqrt{f}^{-1}$.

AUFGABE 0.13 — Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine nichtnegative messbare Funktion mit $\int_{\Omega} f \, d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass dann das Maß der Menge $\{f > \varepsilon\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ endlich ist.

AUFGABE 0.14 — Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt: $|\int_A f \, d\mu| < \varepsilon$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst beschränktes f .

AUFGABE 0.15 — Prüfen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \sin(x^\alpha)$ auf Lebesgue-Integrierbarkeit sowie auf uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit über \mathbb{R} .

AUFGABE 0.16 — Es seien $p \in (0, 1)$ und $q \in (-\infty, 0)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ferner sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei messbare numerische Funktionen, so dass $\{g = 0\} \setminus \{f = 0\}$ eine μ -Nullmenge ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int |fg| \, d\mu \geq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q},$$

falls $\int |g|^q \, d\mu < \infty$.