Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 9

Abgabe am 16. bzw. 17. Juni 2005

AUFGABE 9.1 (4 Punkte) — Es seien zufällige Punkte $0 < T_1 < T_2 < \dots$ auf der positiven Achse gegeben. Für $0 \le a < b$ sei $N_{(a,b]}$ die Zahl jener dieser Punkte, die im Intervall $(a, b]$ liegen. Die Familie der $N_{(a,b]}$ mit $0 \le a < b$ erfülle die Axiome (P1) bis (P5) aus Abschnitt 4.4.
Wir betrachten die Abstände $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ (wobei $k \in \mathbb{N}$ und $T_0 = 0$) zwischen Aufeinanderfolgenden dieser zufälligen Punkte. Zeigen Sie, dass τ_2 und τ_1 unabhängige, zum Parameter $\alpha = \mathbb{E}(N_{(0,1]})$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha t_2} 1_{\{0 \le t_1 < t_2\}}$ eine Dichte des Zufallsvektors (T_1, T_2) ist.
Bemerkung: Analog kann man auch zeigen, dass alle τ_k mit $k \in \mathbb{N}$ unabhängige, zum Parameter $\alpha = \mathbb{E}(N_1)$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind. Dies zeigt, dass die in Satz 4.4.2 gegebene Konstruktion sogar äquivalent zu dem axiomatischen Zugang via (P1) bis (P5) ist.

AUFGABE 9.2 (4 Punkte) — Gegeben seien unabhängige zum Parameter α exponentialverteilte Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$. Wir setzen $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(M_n \le x + \frac{\log n}{\alpha}\Big) = \exp(-\mathrm{e}^{\alpha x}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

AUFGABE 9.3 (4 Punkte) — Seien $a < b$ und $f\colon [a, b] \to (0, \infty)$ eine positive stetige Funktion. Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment, dessen oftmalige unabhängige Ausführung es gestattet, den Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu approximieren.

AUFGABE 9.4 (4 Punkte) — Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ setzen wir

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Benutzen Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahlen, um zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f konvergiert.
Hinweise: Die f_n werden die *Bernstein-Polynome* genannt. In dieser Aufgabe geben Sie einen konstruktiven Beweis des *Weierstraßschen Approximationssatzes*.

Organisatorische Information (Wiederholung): Die Vorlesung am Donnerstag, dem 9. Juni, findet ausnahmsweise nicht im Ch Ex statt, sondern im Ch H4 (Linnéstr. 2), dem Saal der Mittwochsvorlesungen.