Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 8

Abgabe am 9. bzw. 10. Juni 2005

AUFGABE 8.1 (4 Punkte) — Seien X und Y zwei unabhängige, zu den Parametern λ bzw. $\mu \in (0,\infty)$ exponentialverteilte Zufallsgrößen. Ferner seien

$$N = \mathbb{1}_{\{X \geq Y\}}, \qquad U = \min\{X, Y\}, \qquad W = |X - Y|.$$

(i) Zeigen Sie, daß N und U unabhängig sind.

(ii) Zeigen Sie, daß U und W unabhängig sind.

Hinweis: Eine diskrete Zufallsgröße A mit abzählbarer Wertemenge I und eine kontinuierliche, reelle Zufallsgröße B sind genau dann unabhängig, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $i \in I$ gilt: $P(A = i, B > t) = P(A = i)P(B > t)$.

AUFGABE 8.2 (4 Punkte) — Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, d.h. X sei normalverteilt zu den Parametern $\mu = 0$ und σ^2. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}(|X|^p) = \sqrt{2^p/\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})\sigma^p$ für $p > 0$.

(ii) $\mathbb{E}(X^p) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sigma^{2n}, & \text{falls } p = 2n \\ 0, & \text{falls } p = 2n-1, \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Funktionalgleichung der Γ-Funktion, sowie die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

AUFGABE 8.3 (4 Punkte) — Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, & \text{falls } x \operatorname{sign}(y) \geq y \operatorname{sign}(x), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $X, Y, X+Y$ und $X-Y$ zentrierte, normalverteilte Zufallsgrößen mit $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 1$ und $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X-Y) = 2$ sind.

(ii) Zeigen Sie, dass X und Y zwar unkorreliert, aber abhängig sind.

AUFGABE 8.4 (4 Punkte) — Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$, die Kugel vom Radius R um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$. Ein Punkt in K werde zufällig gewählt (Gleichverteilung). Es bezeichne X die Zufallsgröße, die den Abstand des Punktes vom Ursprung misst.
Bestimmen Sie eine Dichte von X.

Organisatorische Information: Die Vorlesung am Donnerstag, dem 9. Juni, findet ausnahmsweise nicht im Ch Ex statt, sondern im Ch H4 (Linnéstr. 2), dem Saal der Mittwochsvorlesungen.