Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 7

Abgabe in den Übungen vom 1. bis 6. Dezember 2005

AUFGABE 7.1 Es seien X und Y zwei $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsgrößen mit charakteristischen Funktionen φ_X bzw. φ_Y. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) φ ist genau dann reellwertig, wenn X und $-X$ die selbe Verteilung haben.

(ii) Wenn X und Y unabhängig sind, so gilt $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.

4 Punkte

AUFGABE 7.2 Sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion φ. Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Zeigen Sie, dass φ für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mindestens n Mal differenzierbar ist und dass die Ableitungen gegeben sind durch

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(\mathrm{i}X)^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}].$$

4 Punkte

Hinweis: Betrachten Sie $Y_k(t, h, x) = k! h^{-k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}hX} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\mathrm{i}hX)^l}{l!}\big)$.

AUFGABE 7.3 (SATZ VON CRAMÉR-WOLD) Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvektoren mit Werten im $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $X_n \Longrightarrow X$ genau dann gilt, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\langle \lambda, X_n \rangle \Longrightarrow \langle \lambda, X \rangle$.

4 Punkte

Hinweis: Bei der Richtung '$\Longleftarrow$' zeigen Sie zunächst die Straffheit und betrachten dann die charakteristischen Funktionen.

AUFGABE 7.4 Es sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit einer positiv definiten Kovarianzmatrix. Zeigen Sie, dass X genau dann normalverteilt ist, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsgröße $\langle \lambda, X \rangle$ normalverteilt ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\langle \lambda, X \rangle$. **4 Punkte**

Hinweis (Wiederholung): Auf Wunsch Herrn Schmüdgens wird eine Vorlesung getauscht: Am **Montag, dem 28. November**, wird von **15^{20} Uhr bis 16^{50}Uhr** im Theoretischen Hörsaal des Physikalischen Instituts (Linnéstr. 5) eine Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie II* gehalten, und am **Mittwoch, dem 7. Dezember**, wird von **13^{15} Uhr bis 14^{45}Uhr** im 0-99 im Seminargebäude eine Vorlesung *Funktionalanalysis* gehalten.