Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 7

Abgabe am 2. bzw. 3. Juni 2005

AUFGABE 7.1 (4 Punkte) — Es sei X eine zum Parameter $\alpha > 0$ Poisson-verteilte Zufallsgröße. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_\alpha^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}\, x.$$

AUFGABE 7.2 (4 Punkte) — Es seien Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ mit Dichten $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben (wir setzen nicht voraus, dass eine gemeinsame Dichte existiert). Zeigen Sie, dass $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn eine gemeinsame Dichte gegeben ist durch die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

AUFGABE 7.3 (4 Punkte) — Es seien U eine auf $[0, 1]$ gleichförmig verteilte Zufallsgröße und $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion. Wir definieren $F^{-1} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$. Zeigen Sie, dass $F^{-1}(U)$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F ist.

AUFGABE 7.4 (4 Punkte) — Es seien $\alpha \in (0, \infty)$ fest und $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, auf $[0, \alpha]$ gleichförmig verteilte Zufallsgrößen. Zeigen Sie Folgendes:

(i) Eine Dichte der Zufallsgröße $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ist gegeben durch die Abbildung $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x) n \alpha^{-n} x^{n-1}$, und ihr Erwartungswert ist $\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{n+1}\alpha$.

(ii) Für $n \to \infty$ konvergiert die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y_n = n(\alpha - M_n)$ gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\alpha}$.