Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 6

Abgabe in den Übungen vom 24. bis 29. November 2005

AUFGABE 6.1 (EXTREMWERTVERTEILUNG) Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, zum Parameter Eins exponentiell verteilte Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \log n$. Bestimmen Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß, gegen das Y_n für $n \to \infty$ in Verteilung konvergiert, durch Angabe seiner Verteilungsfunktion.
Hinweis: Die Grenzwertverteilung nennt man die *Gumbel-Verteilung*.

4 Punkte

AUFGABE 6.2 Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ unabhängige nichtnegative Zufallsgrößen mit zugehörigen *Laplace-Transformierten* $L(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tX}]$ bzw. $L_n(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tX_n}]$ für $t \in [0, \infty)$.

(i) Es gelte $X_n \Longrightarrow X$. Zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierten L_n dann punktweise auf $[0, \infty)$ gegen L konvergieren.

(ii) Es gelte $\lim_{n\to\infty} L_n(t) = L(t)$ für jedes $t \in [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass dann die Folge der Verteilungen von X_n straff ist und dass jede Limesverteilung die Laplace-Transformierte L besitzt.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass jede nichtnegative Zufallsgröße durch ihre Laplace-Transformierte eindeutig bestimmt wird. In der Situation von (ii) folgt also aus der punktweisen Konvergenz der Laplace-Transformierten die schwache Konvergenz von X_n gegen X.

4 Punkte

AUFGABE 6.3 (VARIATIONSPROBLEM) Mit $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})} \int \varphi \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

mindestens einen Minimierer besitzt.
Hinweis: Wählen Sie eine minimierende Folge, benutzen Sie den Satz von Prohorov, um einen Häufungspunkt zu erhalten, und zeigen Sie, dass er ein Minimierer ist. Für jedes $K > 0$ existiert ein $R > 0$ mit $1 \leq \varphi(x)/K$ für alle $|x| > R$. **4 Punkte**

AUFGABE 6.4 Zeigen Sie, dass die sogenannte *Dreiecksverteilung* auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $x \mapsto (1 - |x|)^+$ die charakteristische Funktion $t \mapsto \frac{2}{t^2}(1 - \cos(t))$ besitzt. **4 Punkte**

Hinweis: Auf Wunsch Herrn Schmüdgens wird eine Vorlesung getauscht: Am **Montag, dem 28. November**, wird von **15^{20} Uhr bis 16^{50}Uhr** im Theoretischen Hörsaal des Physikalischen Instituts (Linnéstr. 5) eine Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie II* gehalten, und am **Mittwoch, dem 7. Dezember**, wird von **13^{15} Uhr bis 14^{45}Uhr** im 0-99 im Seminargebäude eine Vorlesung *Funktionalanalysis* gehalten.