Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 6

Abgabe am 26. bzw. 27. Mai 2005

AUFGABE 6.1 (4 Punkte) — Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten für die Anzahl der Einsen und die der Sechsen bei n-maligem unabhängigen Werfen eines fairen Würfels.

AUFGABE 6.2 (4 Punkte) — Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Varianzen. Wie im Lemma 3.5.5 zeigt man, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[(Y-a-bX)^2]$ minimiert wird durch $a = \mathbb{E}[Y] - b\mathbb{E}[X]$ und $b = \mathrm{cov}(X,Y)/\mathbb{V}(X)$. Also wird Y am besten approximiert durch

$$\widetilde{Y} = a + bX = \mathbb{E}[Y] + \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)}\,(X - \mathbb{E}[X]).$$

(i) Zeigen Sie, dass X und $Y - \widetilde{Y}$ unkorreliert sind.
(ii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{Y}$ und $Y - \widetilde{Y}$ unkorreliert sind.
(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(Y-\widetilde{Y}) = \mathbb{V}(Y)(1-\rho(X,Y)^2)$ ist, wobei $\rho(X,Y)$ der Korrelationskoeffizient von X und Y ist.

AUFGABE 6.3 (2 Punkte) — Benutzen Sie Faltungen, um zu zeigen, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsgrößen Poisson-verteilt ist.

AUFGABE 6.4 (4 Punkte) — Es seien N und $X_1, X_2, \dots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, wobei $S_0 = 0$ gesetzt wird. Es sei weiterhin S_N die Zufallsgröße $S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega)$. Die erzeugende Funktion von N sei g, die von X_i sei f (d.h. alle X_i haben die gleiche Verteilung).
(i) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ die erzeugende Funktion von S_N ist.
(ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_N unter der Voraussetzung, dass N und X_1 endlichen Erwartungswert und Varianz besitzen.

AUFGABE 6.5 (2 Punkte) — Es gelten die Voraussetzungen von Aufgabe 6.4. Die Verteilung von X_1 sei gegeben durch $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{\log(1-p)} \frac{p^k}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0,1)$ ein Parameter sei. Ferner sei N Poisson-verteilt. Zeigen Sie, dass S_N eine negative Binomialverteilung besitzt.

Organisatorische Information: Die Vorlesung am Donnerstag, dem 26. Mai, findet ausnahmsweise nicht im Ch Ex statt, sondern im Ch H4 (Linnéstr. 2), dem Saal der Mittwochsvorlesungen.