

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 6

Abgabe am 26. bzw. 27. Mai 2005

AUFGABE 6.1 (4 Punkte) — Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten für die Anzahl der Einsen und die der Sechsen bei n -maligem unabhängigen Werfen eines fairen Würfels.

AUFGABE 6.2 (4 Punkte) — Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Varianzen. Wie im Lemma 3.5.5 zeigt man, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[(Y - a - bX)^2]$ minimiert wird durch $a = \mathbb{E}[Y] - b\mathbb{E}[X]$ und $b = \text{cov}(X, Y)/\mathbb{V}(X)$. Also wird Y am besten approximiert durch

$$\tilde{Y} = a + bX = \mathbb{E}[Y] + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(X)} (X - \mathbb{E}[X]).$$

- (i) Zeigen Sie, dass X und $Y - \tilde{Y}$ unkorreliert sind.
- (ii) Zeigen Sie, dass \tilde{Y} und $Y - \tilde{Y}$ unkorreliert sind.
- (iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(Y - \tilde{Y}) = \mathbb{V}(Y)(1 - \rho(X, Y)^2)$ ist, wobei $\rho(X, Y)$ der Korrelationskoeffizient von X und Y ist.

AUFGABE 6.3 (2 Punkte) — Benutzen Sie Faltungen, um zu zeigen, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsgrößen Poisson-verteilt ist.

AUFGABE 6.4 (4 Punkte) — Es seien N und X_1, X_2, \dots unabhängige \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $S_n := X_1 + \dots + X_n$, wobei $S_0 = 0$ gesetzt wird. Es sei weiterhin S_N die Zufallsgröße $S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega)$. Die erzeugende Funktion von N sei g , die von X_i sei f (d.h. alle X_i haben die gleiche Verteilung).

- (i) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ die erzeugende Funktion von S_N ist.
- (ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_N unter der Voraussetzung, dass N und X_1 endlichen Erwartungswert und Varianz besitzen.

AUFGABE 6.5 (2 Punkte) — Es gelten die Voraussetzungen von Aufgabe 6.4. Die Verteilung von X_1 sei gegeben durch $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{\log(1-p)} \frac{p^k}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0, 1)$ ein Parameter sei. Ferner sei N Poisson-verteilt. Zeigen Sie, dass S_N eine negative Binomialverteilung besitzt.

Organisatorische Information: Die Vorlesung am Donnerstag, dem 26. Mai, findet ausnahmsweise nicht im Ch Ex statt, sondern im Ch H4 (Linnéstr. 2), dem Saal der Mittwochsvorlesungen.