Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 5

Abgabe am 12. bzw. 13. Mai 2005

AUFGABE 5.1 (4 Punkte) — Beweisen Sie Lemma 3.3.8: Der Erwartungswert einer $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsgröße X ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k),$$

auch wenn eine der beiden Seiten nicht endlich ist.

AUFGABE 5.2 (4 Punkte) — Wir betrachten den Julklapp aus Aufgaben 2.5 und 4.3. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Kinder, die ihr eigenes Geschenk erhalten.
Hinweis: Benutzen Sie besser *nicht* das Ein-Ausschlussprinzip oder die explizit bekannte Verteilung dieser Anzahl (die Sie ja aus Aufgabe 4.3 kennen).

AUFGABE 5.3 (4 Punkte) — (i) Benutzen Sie Lemma 3.3.2(a), um den Erwartungswert und die Varianz einer Binomialverteilten Zufallsgröße zu berechnen.
(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung.
(iii) Berechnen Sie die Varianz einer Poisson-verteilten Zufallsgröße.

AUFGABE 5.4 (4 Punkte) — *Erwartungstreuer Schätzer für die Varianz*
Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, und es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen, die alle die gleiche Verteilung besitzen sowie den gleichen Erwartungswert m und die gleiche Varianz σ^2. Wir betrachten den Durchschnitt $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\Big] = \sigma^2.$$