

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 3

Abgabe am 28./29. April 2005

AUFGABE 3.1 (4 Punkte) — Betrachten Sie ein *Bernoulli-Experiment* der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit Erfolgsparameter $p \in [0, 1]$, d. h. den Raum $\Omega = \{0, 1\}^n$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$.

Zeigen Sie, dass die Mengen A_1, \dots, A_n unabhängig sind, wobei $A_j = \{\omega \in \Omega \mid \omega_j = 1\}$.

Geben Sie bei allen folgenden Aufgaben explizit den genutzten Wahrscheinlichkeitsraum an.

AUFGABE 3.2 (4 Punkte) Ein Assistent kennt die Arbeitsgruppe der Studenten A , B und C schon lange und weiß, dass Student A 80%, Student B 15% und Student C nur 5% der Aufgaben bearbeitet und sie es so organisieren, dass keine Aufgabe doppelt bearbeitet wird. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Erfahrungen lösen sie ihre Aufgaben jeweils nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, 50% bzw. 10% fehlerfrei.

Der Assistent hat von der Arbeitsgruppe eine fehlerhafte Lösung erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie jeweils von A , B bzw. C ? Welche dieser Wahrscheinlichkeiten ist am größten?

AUFGABE 3.3 (4 Punkte) — Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Dabei bringt jede 50. Muschel eine Perle hervor. Berechnen Sie die folgenden Fragen jeweils zunächst exakt und dann näherungsweise mit Hilfe der Poissonapproximation. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

1. Wieviele Muscheln müssen geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % mindestens eine Perle zu finden?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Perlen unter 100 Muscheln zu finden?

AUFGABE 3.4 (4 Punkte) — Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung:

Beim zweimaligen Ziehen je einer Kugel aus einer gut gemischten Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln sind die Ereignisse ‘erste Kugel ist weiß’ und ‘zweite Kugel ist weiß’ unabhängig, wenn nach dem ersten Ziehen die gezogene Kugel zurückgelegt wird, jedoch abhängig, wenn die Ziehungen ohne Zurücklegen geschehen.