Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 1

Abgabe in den Übungen vom 20. bis 25. Oktober 2005

AUFGABE 1.1 Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellwertigen Zufallsgrößen. Zeigen Sie, dass die Cesaro-Grenzwerte

$$\underline{Y} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{und} \qquad \overline{Y} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

fast sicher konstant sind (mit Werten in $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$). **4 Punkte**

Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

AUFGABE 1.2 (LINEARITÄT UND MONOTONIE DER BEDINGTEN ERWARTUNG) — Seien X und Y zwei integrierbare Zufallsgrößen. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\lambda X+Y \mid \mathcal{A}] = \lambda\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}]+\mathbb{E}[Y\mid\mathcal{A}]$ fast sicher.

(ii) Falls $X\le Y$ fast sicher, so gilt $\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}]\le\mathbb{E}[Y\mid\mathcal{A}]$ fast sicher.

4 Punkte

AUFGABE 1.3 (BEDINGTE ERWARTUNG ALS ORTHOGONALPROJEKTION) Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{A}$-messbare Zufallsgröße $Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ gilt:

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] \ge \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $Y=\mathbb{E}[X\mid\mathcal{A}]$ fast sicher. **4 Punkte**

AUFGABE 1.4 Das Intervall $[0,1]$ werde durch einen uniform verteilten Teilungspunkt $X\in[0,1]$ in zwei Teile zerlegt. Danach werde das größere der beiden Teilintervalle erneut durch einen auf diesem Teilintervall uniformen Punkt Y zerlegt. Es sei A das Ereignis, dass sich aus den drei Teilstücken ein Dreieck konstruieren lässt. Geben Sie ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A. **4 Punkte**
Hinweis: $\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}[\mathbb{P}(A\mid X)]$.