Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 15

Ferienübungsblatt, Abgabe in der Woche vom 10. Oktober 2005. Die hier erreichten Punkte sind Bonuspunkte zum Übungsscheinkriterium der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II im Wintersemester 2005/06.

AUFGABE 15.1 (4 Punkte) — Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf einem Maßraum (Ω, F, μ), und es existiere eine μ-integrierbare Funktion g mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

AUFGABE 15.2 (4 Punkte) — Es seien (Ω, F, μ) ein Maßraum, $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine integrierbare Funktion mit $c := \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu > 0$ und $\alpha \in (0,\infty)$ eine Konstante. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega n \log(1 + (f/n)^\alpha) \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha \in (0,1), \\ c & \text{für } \alpha = 1, \\ 0 & \text{für } \alpha \in (1,\infty). \end{cases}$$

Hinweise: Für $\alpha \in (0,1)$ benutze man das Lemma von Fatou, für $\alpha \in [1,\infty)$ den Satz von der beschränkten Konvergenz; außerdem zeige und benutze man $\log(1 + x^\alpha) \leq \alpha x$ für $x \geq 0$.

AUFGABE 15.3 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Nullfolgen und die der reellen konvergenten Folgen beide in der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{N}}$ liegen.

AUFGABE 15.4 (4 Punkte) —

1. Es seien λ das Lebesgue-Maß auf $([0,1], B_{[0,1]})$ und $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1)$ eine wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_{[0,1]} g_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$ und $\mathrm{Supp}(g_n) \subset [\delta_n, \delta_{n+1}]$. Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$f(x,y) = \sum_{n=1}^\infty (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, g_n(y), \qquad x, y \in [0,1].$$
Zeigen Sie, dass gilt
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}y)\,\lambda(\mathrm{d}x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}x)\,\lambda(\mathrm{d}y).$$
2. Es sei μ das Zählmaß auf $([0,1], B_{[0,1]})$, d. h. $\mu(A) = \#A$, falls A endlich, und $\mu(A) = \infty$ sonst. Ferner sei f die Indikatorfunktion auf $\Delta := \{\, (x,y) \in [0,1]^2 \mid x = y \,\}$. Zeigen Sie:
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mu(\mathrm{d}y)\,\lambda(\mathrm{d}x) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}x)\,\mu(\mathrm{d}y).$$

AUFGABE 15.5 (4 Punkte) — Jede Kante zwischen zwei Nachbarn auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ sei mit einer festen Wahrscheinlichkeit 'durchlässig' und ansonsten 'undurchlässig'. Die Durchlässigkeit der Kanten sei unabhängig. Im Ursprung ist eine Wasserquelle. Das Wasser kann nur entlang durchlässiger Kanten fließen. Beweisen Sie für $d = 1$, dass das Ereignis 'Es existiert ein Punkt, von dem aus das Wasser nach Unendlich fließen kann' nur die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 annehmen kann.