Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 14

keine Abgabe, sondern zur Gestaltung der letzten Übungen

AUFGABE 14.1 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie:

1. Für alle Folgen $(A_n)_{n\in}$ aus $\mathcal{F}$ gilt

$$\mu\left(\liminf_{n\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\infty} \mu(A_n), \qquad \text{wobei} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

2. Ist μ zudem endlich, so folgt für $(A_n)_{n\in}$ auch

$$\mu\left(\limsup_{n\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\infty} \mu(A_n), \qquad \text{wobei} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

AUFGABE 14.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall und $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $x \in I$ ist $f(\cdot, x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\omega, \cdot)$ differenzierbar mit Ableitung f'.
3. Die Abbildung $\sup_{x\in I} |f'(\cdot, x)|$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Zeigen Sie, dass dann $f'(\cdot, x)$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt und die Funktion $F(x) = \int f(\omega, x)\, \mu(\mathrm{d}\omega)$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = \int f'(\omega, x)\, \mu(\mathrm{d}\omega).$$

AUFGABE 14.3 Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Setze $M(t) = \int e^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x) \in [0, \infty]$. Sei $I = \{t \in \mathbb{R}\colon M(t) < \infty\} \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass M im Inneren von I beliebig oft differenzierbar ist mit

$$M^{(k)}(t) \;=\; \int x^k e^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x) \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Verwenden Sie dies, um die Konvexität von $\log M$ auf I zu zeigen.

AUFGABE 14.4 Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ–endlicher Maßraum, λ das Lebesgue–Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu = \int_{(0,\infty)} \mu\left(f > t\right)\, \lambda(\mathrm{d}t).$$

AUFGABE 14.5 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(f_n)_{n\in}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine numerische Funktion f konvergiert. Zeigen Sie:

1. Ist μ endlich, so ist f integrierbar.
2. Ist μ nur σ–endlich, so ist f i. Allg. nicht integrierbar.