Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 13

Abgabe in den Übungen vom 30. und 31. Januar 2006

AUFGABE 13.1 Es sei $\Gamma = (\gamma(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix, so dass jede linke obere $n\times n$-Teilecke $\Gamma^{(n)}$ positiv definit ist, und $(X_n)_n$ sei eine Folge von zentrierten Zufallsgrößen, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ der Vektor $(X_1,\dots,X_n)$ gemeinsam normalverteilt ist mit Kovarianzmatrix $\Gamma^{(n)}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(X_n)_n$ genau dann stationär ist, wenn es eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ gibt mit $\gamma(i,j)=\varphi(|i-j|)$ für alle $i,j\in\mathbb{N}$.

4 Punkte

AUFGABE 13.2 Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage in Aufgabe 12.3(i): Falls eine Maß erhaltende Transformation ergodisch ist, ist sie auch schwach mischend.

Hinweis: Benutzen Sie den Ergodensatz. **4 Punkte**

AUFGABE 13.3 (L^1-KONVERGENZ IM ERGODENSATZ) Es sei T eine Maß erhaltende Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und $\mathcal{J}$ die σ-Algebra der T-invarianten Ereignisse. Sei X eine integrierbare Zufallsgröße. Nach dem Ergodensatz gibt es eine $\mathcal{J}$-messbare Zufallsgröße Y mit $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X\circ T^i = Y$ fast sicher. Zeigen Sie, dass auch gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X\circ T^i - Y\Big|\Big]=0.$$

Hinweise: Überlegen Sie sich, dass Sie von $Y=0$ ausgehen dürfen, integrieren Sie $|X\circ T^i|$ über die Menge $\{|X\circ T^i|>N\}$, und wenden Sie die Sätze von Egoroff und Lebesgue an. **4 Punkte**

Gegenstand der Maßtheorie ist der

Satz von Egoroff. Es sei $(f_n)_{n\in}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$, die fast sicher gegen eine Funktion $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ konvergiere. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine messbare Menge A mit $\mathbb{P}(A^c)<\varepsilon$, so dass $\lim_{n\to\infty}\sup_{\omega\in A}|f_n(\omega)-f(\omega)|=0$.

AUFGABE 13.4 Es sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein messbarer Raum, und $T\colon\Omega\to\Omega$ messbar. Mit Φ bezeichnen wir die Menge der T-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega,\mathcal{F})$. Zeigen Sie:

(i) Φ ist konvex.

(ii) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}\in\Phi$ ist genau dann ein Extremalpunkt von Φ (d. h., $\mathbb{P}$ kann nicht als $\mathbb{P}=\lambda\mathbb{P}_1+(1-\lambda)\mathbb{P}_2$ dargestellt werden mit $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2\in\Phi$, $\mathbb{P}_1\neq\mathbb{P}_2$ und $\lambda\in(0,1)$), wenn es T-ergodisch ist.

Hinweise zu (b): Stellen Sie ein nicht T-ergodisches Maß $\mathbb{P}\in\Phi$ als Konvexkombination zweier Maße der Form $\mathbb{P}(\cdot\mid A)$ und $\mathbb{P}(\cdot\mid A^c)$ dar. Falls $\mathbb{P}=\lambda\mathbb{P}_1+(1-\lambda)\mathbb{P}_2$ mit $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2\in\Phi$, $\mathbb{P}_1\neq\mathbb{P}_2$ und $\lambda\in(0,1)$, bestimmen Sie im Fall, daß $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ ergodisch sind, den Wert von $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{1}_A(T^j)=\mathbb{P}_1(A)\,\})$ für eine geeignete Menge A.

4 Punkte

Für den Hausaufgabenteil des Übungsscheinkriteriums ist das Erzielen von mindestens 104 der 228 Punkte der Übungsblätter 1 bis 13 (inklusive des Ferienblattes) ausreichend. Vergessen Sie aber auch nicht das Mitarbeitskriterium!